Tentamen
MVE505 Diskret Matematik TM1

2024-05-31 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 45 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under VT-2024. Preliminärt så krävs 65 poäng för betyget 4 och 85 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 25 juni. Granskning ordnas därefter av kursansvarig.

OBS! Alla stegen i dina resonemang måste motiveras väl i skrift och alla beräkningar visas. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning av någon av uppgifterna 1-7 åberopar en sats från kurslitteraturen så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen.

I Uppgift 1 behöver du *inte* ange svaren som explicita decimaltal.

Jag bifogar 3 exemplar av Figur 6 så att ni har extra kladdpapper.

Var god vänd!

Uppgifterna

1. 20 lag spelar i Premier League. Den gångna säsongen var 7 av dessa från Greater London[1], 5 från North-West England[2], 2 från South Coast[3] och 6 från Rest of England[4]. Liverpool hör till North-West England. Under första halvan av säsongen (19 spelomgångar) spelar varje par av lag mot varandra en gång.

(a) Om spelschemat väljs slumpmässigt,

i. hur många möjligheter finns det för Liverpools första 7 motståndare, i ordning ? (3p)

ii. vad är sannolikheten att högst 2 av Liverpools första 7 motståndare kommer från Greater London ? (3p)

(b) Hur många möjligheter finns det för Liverpools spelschema under första halvan av säsongen om det enda vi bryr oss om är vilket av de 4 landsområdena varje motståndare kommer ifrån (med andra ord, vi bryr oss inte om de specifika motståndarna eller om det är hemma eller bortamatch) ? (3p)

(c) Under sina 10 första matcher gjorde Liverpool 23 mål. Hur många möjligheter fins det för facitet som anger antalet gjorda mål per match

i. totalt, dvs utan några begränsingar *alls* på antalet gjorda mål per match ? (3p)

ii. om man vet att de gjorde minst ett mål i varje match och att de gjorde exakt två mål 3 gånger ? (3p)

2. Bestäm en explicit formel för talen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller rekursionen (12p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2} + 7^n + 36, \quad \forall\, n \geq 2.$$

3. Bestäm den allmäna lösningen till den Diofantiska ekvationen (9p)

$$993x + 531y = 30,$$

samt den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

4. Bestäm den allmäna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser: (8p)

$$2x \equiv 3 \pmod 5, \qquad 4x \equiv 2 \pmod 9, \qquad 7x \equiv 1 \pmod{16}.$$

5. (a) Exakt ett av talen 451, 471 och 491 är ett primtal. Vilket ? (Obs! Motivera ditt svar. Det räcker att motivera varför två av talen *inte* är primtal.). (3p)

(b) Beräkna (7p)

$$3^{1679} \pmod{490}.$$

---

[1] Arsenal, Brentford, Chelsea, Crystal Palace, Fulham, Tottenham, West Ham.
[2] Burnley, Everton, Liverpool, Mancheter City, Manchester United.
[3] Bournemouth, Brighton.
[4] Aston Villa, Luton, Nottingham Forest, Newcastle, Sheffield United, Wolverhampton.

6. Låt G vara nätverket i Figur 6 and låt G^* vara den underliggande oriktade och oviktade grafen.

(a) Bestäm med bevis $\chi(G^*)$ och ange en explicit optimal färgläggning. (4p)

(b) Implementera Ford-Fulkerson algoritmen för att bestämma ett maximalt flöde från s till t i nätverket G och en motsvarande minumum cut. Skriv tydligt vilken f-augmenterande stig du väljer i varje steg. Rita det slutgiltiga flödet i sin helhet och indikera motsvarande minimum cut. (8p)

7. Implementera Gale-Shapley algoritmen, med X som mängden av friare, för att hitta en stabil matchning till datan i Figur 7. Skriv tydligt vilka frierier som görs, vilka avslag som ges och statusen av strängarna efter varje omgång, samt ange den slutgiltiga stabila matchningen. (9p)

Obs! Du får poäng för att visa *tydligt hur* algoritmen fortskrider, inte endast för att få den korrekta slutgiltiga matchingen, vilket kanske går att lista ut utan att köra algoritmen.

8. (a) Definiera *Stirlingtalet av andra arten* $S(n, k)$, där n och k är positiva heltal. (1.5p)

(b) Formulera och bevisa en rekursionsformel för talen $S(n, k)$. (9p)

(c) Utan att hänvisa till rekursionen, förklara varför $S(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. (2.5p)

9. (a) Definiera vad som menas med en *Hamiltoncykel* i en enkel graf G. (1.5p)

(b) Formulera och bevisa Diracs sats, som ger ett tillräckligt villkor för existens av en Hamiltoncykel i en enkel graf G. (10.5p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Diskret Matematik TM1, 240531

1. (a) i. We have to choose 7 teams from 19, in order, so there are $P(19, 7) = \frac{19!}{7!}$ possibilities.

ii. Note that the order doesn't matter as far as this probability is concerned, so let's assume order doesn't matter. There are then a total of $\binom{19}{7}$ possibilities for Liverpool's first 7 opponents. The desired probability is thus $N/\binom{19}{7}$, where N is the number of choices such that at most 2 of the 7 teams are from Greater London. If there are i teams from GL, then these can be chosen in $\binom{7}{i}$ ways, and the remaining $7-i$ teams can then be chosen in $\binom{19-7}{7-i} = \binom{12}{7-i}$ ways. By AP and MP, the answer becomes

$$\frac{\binom{7}{0}\binom{12}{7} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \frac{7}{2}\binom{12}{5}}{\binom{19}{7}} = \frac{\binom{12}{7} + 7 \cdot \binom{12}{6} + 21 \cdot \binom{12}{5}}{\binom{19}{7}}.$$

(b) Let's denote the 4 regions by the letters L (London), N (North-West), S (South Coast) and R (Rest). The problem is equivalent to counting the number of 19-letter words which can be made from 7 L's, 4 N's, 2 S's and 6 R's. By Theorem 2.6, the number of such words is $\frac{19!}{7!\,4!\,2!\,6!}$.

(c) i. 23 indistinguishable balls (the goals) are to be placed in 10 distinguishable bins (the matches). By Proposition 1.9, this can be done in $\binom{23+10-1}{10-1} = \binom{32}{9}$ ways.

ii. First of all, there are $\binom{10}{3}$ possibilities for the three games in which two goals were scored. Then we are left with 17 goals to distribute amongst 7 matches. But each match must get at least one goal, so we have 10 goals left to distribute amongst 7 matches. No remaining match must get exactly one more goal. If k of the 7 matches each receive at least two more goals, then
- $1 \leq k \leq 5$,
- these k matches can be chosen in $\binom{7}{k}$ ways,
- we first give each of these matches 2 goals, and then have left $10 - 2k$ goals which can be distributed *freely* amongst the k matches, in $\binom{(10-2k)+k-1}{k-1} = \binom{9-k}{k-1}$ ways.

Putting everything together, and using MP and AP, the total number of possibilities becomes

$$\binom{10}{3} \cdot \left[\sum_{k=1}^{5} \binom{7}{k}\binom{9-k}{k-1} \right].$$

2. *Step 1:* The characteristic equation is $x^2 = 5x + 14$, which has the roots $x_1 = -2$, $x_2 = 7$. Hence the general solution of the homogeneous equation is

$$a_{h,\,n} = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 7^n.$$

Step 2: Since 7 is a root of multiplicity one of the characteristic equation, whereas 1 is not a root at all, our choice of a particular solution should look like

$$a_{p,\,n} = a_{p_1,\,n} + a_{p_2,\,n},$$

where

$$a_{p_1,n} = C_3 \cdot n \cdot 7^n, \quad a_{p_2,n} = C_4.$$

Inserting into the recurrence gives, firstly,

$$C_3 \cdot n \cdot 7^n = 5C_3 \cdot (n-1) \cdot 7^{n-1} + 14C_3 \cdot (n-2) \cdot 7^{n-2} + 7^n.$$

The coefficients of $n \cdot 7^n$ will cancel exactly, and equating coefficients of 7^n yields

$$0 = -\frac{5C_3}{7} - \frac{28C_3}{49} + 1 \Rightarrow C_3 = \frac{7}{9}.$$

Secondly,

$$C_4 = 5C_4 + 14C_4 + 36 \Rightarrow C_4 = -2.$$

Step 3: Hence, the general solution of the recurrence is

$$a_n = a_{h,n} + a_{p_1,n} + a_{p_2,n} = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 7^n + n \cdot \frac{7^{n+1}}{9} - 2.$$

Insert the initial conditions:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad a_0 = 1 = C_1 + C_2 - 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 3, \\ n = 1: \quad a_1 = 1 = -2C_1 + 7C_2 + \frac{49}{9} - 2 \Rightarrow -2C_1 + 7C_2 = -\frac{22}{9}. \end{aligned}$$

We solve easily to get $C_1 = 211/81$, $C_2 = 32/81$. Hence,

$$a_n = \frac{211}{81} \cdot (-2)^n + \left(\frac{32}{81} + \frac{7n}{9}\right) \cdot 7^n - 2.$$

3. First run Euclid's algorithm forwards to find GCD(993, 531):

$$\begin{aligned} 993 &= 1 \cdot 531 + 462, \\ 531 &= 1 \cdot 462 + 69, \\ 462 &= 6 \cdot 69 + 48, \\ 69 &= 1 \cdot 48 + 21, \\ 48 &= 2 \cdot 21 + 6, \\ 21 &= 3 \cdot 6 + 3, \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

So GCD(993, 531) = 3, which means the Diophantine equation has a solution, since the right-hand side is a multiple of 3. The general solution has the form

$$x = mx_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \quad y = my_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Here $a = 993$, $b = 531$, $d = 3$ and $m = c/d = 30/3 = 10$. To find (x_0, y_0), we run backwards through Euclid:

$$\begin{aligned} 3 &= 21 - 3 \cdot 6 \\ &= 21 - 3(48 - 2 \cdot 21) \\ &= -3 \cdot 48 + 7 \cdot 21 \\ &= -3 \cdot 48 + 7(69 - 48) \\ &= 7 \cdot 69 - 10 \cdot 48 \\ &= 7 \cdot 69 - 10(462 - 6 \cdot 69) \\ &= -10 \cdot 462 + 67 \cdot 69 \\ &= -10 \cdot 462 + 67(531 - 462) \\ &= 67 \cdot 531 - 77 \cdot 462 \\ &= 67 \cdot 531 - 77(993 - 531) \\ \Rightarrow 3 &= -77 \cdot 993 + 144 \cdot 531. \end{aligned}$$

Thus $x_0 = -77$, $y_0 = 144$. Inserting into (1) gives

$$x = -770 + 177n, \quad y = 1440 - 331n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Taking $n = 4$ gives $x = -62$, $y = 116$ and this is clearly the solution which minimizes $|x| + |y|$.

4. First some editing:

$$\begin{aligned} 2x \equiv 3 \pmod 5 &\Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 3 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod 5, \\ 4x \equiv 2 \pmod 9 &\Rightarrow x \equiv 4^{-1} \cdot 2 \equiv 7 \cdot 2 \equiv 5 \pmod 9, \\ 7x \equiv 1 \pmod{16} &\Rightarrow x \equiv 7^{-1} \cdot 1 \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{16}. \end{aligned}$$

Thus, by eq. (11.3) in the lecture notes, the general solution is

$$x \equiv 4 \cdot b_1 \cdot 9 \cdot 16 + 5 \cdot b_2 \cdot 5 \cdot 16 + 7 \cdot b_3 \cdot 5 \cdot 9 \pmod{5 \cdot 9 \cdot 16}, \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv (9 \cdot 16)^{-1} \equiv (4 \cdot 1)^{-1} \equiv 4^{-1} \equiv -1 \pmod 5, \\ b_2 &\equiv (5 \cdot 16)^{-1} \equiv (5 \cdot 7)^{-1} \equiv 35^{-1} \equiv (-1)^{-1} \equiv -1 \pmod 9, \\ b_3 &\equiv (5 \cdot 9)^{-1} \equiv 45^{-1} \equiv (-3)^{-1} \equiv 5 \pmod{16}. \end{aligned}$$

We thus choose $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 5$ and insert into (2) to get

$$\begin{aligned} x &\equiv -4 \cdot 9 \cdot 16 - 5 \cdot 5 \cdot 16 + 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \\ &\equiv -576 - 400 + 1575 \equiv 599 \pmod{720}. \end{aligned}$$

ANSWER: $x \equiv 599 \pmod{720}$.
SANITY CHECK: Check that $x = 599$ satisfies the original three congruences by direct calculation:

$599 - 4 = 595 = 5 \cdot 119$, ok

$599 - 5 = 594 = 11 \cdot 54$, ok

$599 - 7 = 592 = 16 \cdot 37$, ok !

5. (a) $1 - 4 + 5 = 0$ is divisible by 11, thus so is 451. $4 + 7 + 1 = 12$ is divisible by 3, thus so is 471. Hence, it must be that 491 is the prime.

(b) First factorize:

$$490 = 2 \cdot 245 = 2 \cdot 5 \cdot 49 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Hence,

$$\phi(490) = \phi(2) \cdot \phi(5) \cdot \phi(7^2) = (2 - 1)(5 - 1)(7^2 - 7) = 1 \cdot 4 \cdot 42 = 168.$$

Moreover, since $\text{GCD}(3, 490) = 1$, Euler's theorem applies and says that $3^{168} \equiv 1 \pmod{490}$. Thus,

$$3^{1679} = (3^{168})^{10} \cdot 3^{-1} \equiv 1^{10} \cdot 3^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv -163 \equiv 327.$$

ANSWER: $3^{1679} \equiv 327 \pmod{490}$.

6. (a) If we apply the greedy coloring algorithm, starting with s, then continuing in alphabetical order and finishing with t, we will use 4 colors, as follows:

Color 1: s, g, h.

Color 2: a, c, i.

Color 3: b, e, t.

Color 4: f.

Hence $\chi(G^*) \leq 4$. But G^* contains an odd-wheel subgraph W_7 centered at f and with spokes out to b, d, e, h, t, g, c. Since this subgraph already requires 4 colors, we must have $\chi(G^*) = 4$ and the above is an optimal coloring.

(b) The algorithm could proceed as follows (there are other alternatives).

Step	f-augmenting path	Increase in flow strength
1	$s \to a \to e \to h \to t$	7
2	$s \to b \to f \to t$	8
3	$s \to c \to g \to i \to t$	6
4	$s \to a \to b \to d \to f \to h \to t$	2
5	$s \to b \to d \to f \to t$	1
6	$s \to b \to g \to t$	3
7	$s \to c \to f \to t$	1
8	$s \to c \to f \to g \to t$	2
9	$s \to c \to g \to t$	2
Total flow strength		32

The final flow is illustrated in Figure L.6. The set of nodes that can now be reached from s via an augmenting path is $S = \{s, a, b, c, d, e\}$. Sätt $T = V \setminus S = \{f, g, h, i, t\}$. Then we have

$$c(S, T) = c(e, h) + c(d, f) + c(b, f) + c(b, g) + c(c, f) + c(c, g) = 7+3+8+3+3+8 = 32 = |f|.$$

7.

Round	Proposals	Rejections	Strings
1	(α, A), (β, C), (γ, B), (δ, B), (ε, A)	(A, ε), (B, γ)	(A, α), (B, δ), (C, β)
2	(γ, D), (ε, C)	(C, ε)	(A, α), (B, δ), (C, β), (D, γ)
3	(ε, D)	(D, γ)	(A, α), (B, δ), (C, β), (D, ε)
4	(γ, A)	(A, γ)	(A, α), (B, δ), (C, β), (D, ε)
5	(γ, C)	(C, β)	(A, α), (B, δ), (C, γ), (D, ε)
6	(β, A)	(A, β)	(A, α), (B, δ), (C, γ), (D, ε)
7	(β, B)	(B, δ)	(A, α), (B, β), (C, γ), (D, ε)
8	(δ, C)	(C, δ)	(A, α), (B, β), (C, γ), (D, ε)
9	(δ, A)	(A, α)	(A, δ), (B, β), (C, γ), (D, ε)
10	(α, E)		(A, δ), (B, β), (C, γ), (D, ε), (E, α)

8. (a) Example 6.2 in the lecture notes.

(b) Theorem 6.3 in the lecture notes.

(c) $S(n, n-1)$ is the number of ways to distribute n distinguishable balls into $n-1$ indistinguishable bins so that no bin is left empty. Thus, one bin must receive 2 balls and every other bin 1 ball. Since the balls are distinguishable but not the bins, all that matters is which 2 balls go together. There are $\binom{n}{2}$ ways to choose these 2 balls, and thus $S(n, n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, v.s.v.

9. (a) Definition 16.3 in the lecture notes.

(b) Theorem 16.4 in the lecture notes.