Tentamen
MVE505 Diskret Matematik TM1

2023-06-02 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 45 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under VT-2023. Preliminärt så krävs 65 poäng för betyget 4 och 85 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 22 juni. Granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS! Alla stegen i dina resonemang måste motiveras väl i skrift och alla beräkningar visas. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning av någon av uppgifterna 1-7 åberopar en sats från kurslitteraturen så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen.

I Uppgift 1 behöver du ange svaret som ett explicit decimaltal *endast i* deluppgift (c.ii).

Jag bifogar 3 exemplar av Figur 6 så att ni har extra kladdpapper.

Var god vänd!

Uppgifterna

1. (a) Det finns 65 personer anmälda till denna kurs i Canvas, varav 10 är tjejer. På hur många sätt kan man välja ut en grupp av 4 kursrepresentanter om

i. valet är fritt men varje person måste tilldelas en viss roll i gruppen och det spelar roll vem som får vilken roll ? (3p)

ii. det finns inga särskilda roller att tilldela, däremot finns det ett krav att det måste finnas minst en person av varje kön i gruppen ? (3p)

(b) Antag att alla som är anmälda till kursen går TM1 och att det är också 65 st på både TM2 och TM3, med exakt samma könsfördelning som på TM1. På hur många sätt kan man välja ut 11 personer för TMs fotbollslag om det enda vi bryr oss om är *hur många* av varje kön och årskurs som väljs ? (3p)

(c) Hur många "ord" (dvs valfria bokstavskombinationer) kan man göra av bokstäverna i ESPRESSOHOUSE

i. där alla bokstäverna används ? (2p)

ii. där exakt 4 bokstäver används ? (4p)

2. Bestäm en explicit formel för talen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller rekursionen (12p)

$$a_0 = 1, \;\; a_1 = \frac{9}{2}, \quad a_n = 7a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n - 5n - \frac{3}{2}, \;\; \forall\, n \geq 2.$$

3. För vilka $b \in \mathbb{Z}$ har kongruensen (8p)

$$207x \equiv b \pmod{462}.$$

en lösning ? Bestäm kongruensens allmäna lösning, samt dess största negativa lösning, då $b = 30$.

4. Bestäm den allmäna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser: (8p)

$$3x \equiv 4 \pmod{10}, \quad 4x \equiv 2 \pmod{11}, \quad 2x \equiv 7 \pmod{13}.$$

5. Bestäm alla $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller (8p)

$$x^{29} \equiv 5 \pmod{126}.$$

(Tips: $29 \cdot 5 = 144 + 1$).

Var god vänd!

6. Låt G vara nätverket i Figur 6 and låt G^* vara den underliggande oriktade och oviktade grafen.

(a) Ange en maximum matching i G^*. (2p)

(b) Ange en Hamiltoncykel i G^*. (2p)

(c) Lägg till så få kanter som möjligt till G^* så att den resulterande grafen är fortsatt enkel men har en Eulerväg. Ange också en explicit Eulerväg i den resulterande grafen. (3p)

(d) Bestäm med bevis $\chi(G^*)$ och ange en explicit optimal färgläggning. (3p)

(e) Implementera Ford-Fulkerson algoritmen för att bestämma ett maximalt flöde från s till t i nätverket G och en motsvarande minumum cut. Skriv tydligt vilken f-augmenterande stig du väljer i varje steg. Rita det slutgiltiga flödet i sin helhet och indikera motsvarande minimum cut. (7p)

7. Implementera Gale-Shapley algoritmen, med X som mängden av friare, för att hitta en stabil matchning till datan i Figur 7. Skriv tydligt vilka frierier som görs, vilka avslag som ges och statusen av strängarna efter varje omgång, samt ange den slutgiltiga stabila matchningen. (7p)

8. Formulera och bevisa Aritmetikens Fundamentalsats. (13p)

9. Bevisa att om $n \geq 3$ och G är en graf på n noder sådan att varje nod har grad minst $n/2$, då har G en Hamiltoncykel. (12p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Diskret Matematik TM1, 230602

1. (a) i. Since each person is given an assigned role in the group, we can imagine that the order in which the 4 people are chosen matters. Hence the number of possibilities is $P(65,\,4) = 65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 62 = 16,248,960$.

ii. If we could choose freely then there would be $\binom{65}{4}$ possible choices. Of these, $\binom{55}{4}$ consist only of men and $\binom{10}{4}$ consist only of women. Hence the number of possibilities is $\binom{65}{4} - \binom{55}{4} - \binom{10}{4}$.

(b) There are 6 different categories of people, the men and women in each year. Since we only care about the number of people chosen from each category, we are placing 11 indistinguishable balls into 6 distinguishable boxes. With a completely free choice, the number of ways this can be done is $\binom{11+6-1}{6-1} = \binom{16}{5}$. However, we cannot choose all 11 team members as girls from the same year, which removes 3 possibilities. Hence the number of possibilities is $\binom{16}{5} - 3$.

(c) i. There are 13 letters in total, of which 4 are S, 3 are E and 2 are O. Hence, by Theorem 2.6, the number of possible words is $\frac{13!}{4!\,3!\,2!}$.

ii. A 4-letter word must be of one of the following 10 types.
Type 1: 4 S's.
Type 2: 3 S's and one other letter.
Type 3: 3 E's and one other letter.
Type 4: 2 S's and 2 E's.
Type 5: 2 S's and 2 O's.
Type 6: 2 E's and 2 O's.
Type 7: 2 S's and 2 other, distinct letters.
Type 8: 2 E's and 2 other, distinct letters.
Type 9: 2 O's and 2 other, distinct letters.
Type 10: 4 distinct letters.

There is one word of Type 1.
There are $6 \times 4 = 24$ words of Type 2, since there are 6 choices for the 4th letter (E, O, P, R, H, U) and 4 choices for where to put it in the word. Similarly, there are 24 words of Type 3.
There are $\binom{4}{2} = 6$ words of Type 4, since we just need to choose where to put the 2 S's. Similarly, there are 6 words of Types 5 and 6.
There are $\binom{4}{2} \times 6 \times 5 = 180$ words of Type 7, since we first choose where to put the 2 S's and then choose the remaining two, distinct letters (order matters). Similarly, there are 180 words of Types 8 and 9.
There are $P(7,\,4) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ words of Type 10.

Adding up everything, the total number of 4-letter words is

$$1 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 180 + 840 = 1447.$$

2. *Step 1:* The characteristic equation is $x^2 = 7x - 6$, which has the roots $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Hence the general solution of the homogeneous equation is

$$a_{h,\,n} = C_1 + C_2 \cdot 6^n.$$

Step 2: Since 1 is a root of multiplicity one of the characteristic equation, whereas 2 is not a root at all, our choice of a particular solution should look like

$$a_{p,\,n} = a_{p_1,\,n} + a_{p_2,\,n},$$

where

$$a_{p_1,\,n} = C_3 \cdot 2^n, \quad a_{p_2,\,n} = C_4 n^2 + C_5 n.$$

Inserting into the recurrence gives, firstly,

$$C_3 \cdot 2^n = 7C_3 \cdot 2^{n-1} - 6C_3 \cdot 2^{n-2} + 2^n \Rightarrow C_3 = (7C_3) \cdot \frac{1}{2} - (6C_3) \cdot \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_3 = -1.$$

Secondly,

$$C_4 n^2 + C_5 n = 7[C_4(n-1)^2 + C_5(n-1)] - 6[C_4(n-2)^2 + C_5(n-2)] - 5n - \frac{3}{2}.$$

The coefficients of n^2 will cancel exactly. Comparing coefficients of n yields

$$C_5 = 7(-2C_4 + C_5) - 6(-4C_4 + C_5) - 5 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_4 = \frac{1}{2},$$

and comparing constant coefficients yields

$$0 = 7(C_4 - C_5) - 6(4C_4 - 2C_5) - \frac{3}{2} \Rightarrow C_5 = \frac{1}{5}\left(17C_4 + \frac{3}{2}\right) \overset{C_4=1/2}{=} 2.$$

Step 3: Hence, the general solution of the recurrence is

$$a_n = a_{h,\,n} + a_{p_1,\,n} + a_{p_2,\,n} = C_1 + C_2 \cdot 6^n - 2^n + \frac{n^2}{2} + 2n.$$

Insert the initial conditions:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad a_0 &= 1 = C_1 + C_2 - 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2, \\ n = 1: \quad a_1 &= \frac{9}{2} = C_1 + 6C_2 - 2 + \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow C_1 + 6C_2 = 4. \end{aligned}$$

We solve easily to get $C_1 = 8/5$, $C_2 = 2/5$. Hence,

$$a_n = \frac{2}{5} \cdot 6^n - 2^n + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{8}{5}.$$

3. First run Euclid's algorithm forwards to find GCD(207, 462):

$$\begin{aligned} 462 &= 2 \cdot 207 + 48, \\ 207 &= 4 \cdot 48 + 15, \\ 48 &= 3 \cdot 15 + 3, \\ 15 &= 5 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

So GCD(207, 462) = 3, which means the congruence has a solution if and only if b is a multiple of 3. Now take $b = 30$ and first divide through by 3 to get the equivalent congruence

$$69x \equiv 10 \pmod{154} \;\Rightarrow\; x \equiv 69^{-1} \cdot 10 \pmod{154}. \tag{1}$$

To compute the inverse, we run backwards through Euclid:

$$\begin{aligned} 3 &= 48 - 3 \cdot 15 \\ &= 48 - 3(207 - 4 \cdot 48) \\ &= -3 \cdot 207 + 13 \cdot 48 \\ &= -3 \cdot 207 + 13(462 - 2 \cdot 207) \\ &\Rightarrow 3 = 13 \cdot 462 - 29 \cdot 207 \\ &\Rightarrow 1 = 13 \cdot 154 - 29 \cdot 69. \end{aligned}$$

We read this modulo 154, which implies that $69^{-1} \equiv -29 \pmod{154}$. Inserting into (1) then gives

$$x \equiv -29 \cdot 10 \equiv -290 \equiv 18 \pmod{154}.$$

So the general solution is $x \equiv 18 \pmod{154}$ and the largest negative solution is $18 - 154 = -136$.

4. First some editing:

$$\begin{aligned} 3x \equiv 4 \pmod{10} &\Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 4 \equiv 7 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{10}, \\ 4x \equiv 2 \pmod{11} &\Rightarrow x \equiv 4^{-1} \cdot 2 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{11}, \\ 2x \equiv 7 \pmod{13} &\Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 7 \equiv 7 \cdot 7 \equiv 49 \equiv 10 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Thus, by eq. (11.3) in the lecture notes, the general solution is

$$x \equiv 8 \cdot b_1 \cdot 11 \cdot 13 + 6 \cdot b_2 \cdot 10 \cdot 13 + 10 \cdot b_3 \cdot 10 \cdot 11 \pmod{10 \cdot 11 \cdot 13}, \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv (11 \cdot 13)^{-1} \equiv (1 \cdot 3)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv 7 \pmod{10}, \\ b_2 &\equiv (10 \cdot 13)^{-1} \equiv ((-1) \cdot 2)^{-1} \equiv (-2)^{-1} \equiv -6 \pmod{11}, \\ b_3 &\equiv (10 \cdot 11)^{-1} \equiv ((-3) \cdot (-2))^{-1} \equiv 6^{-1} \equiv -2 \pmod{13}. \end{aligned}$$

We thus choose $b_1 = 7$, $b_2 = -6$, $b_3 = -2$ and insert into (2) to get

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 13 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11 \\ &\equiv 8008 - 4680 - 2200 \equiv 1128 \pmod{1430}. \end{aligned}$$

Answer: $x \equiv 1128 \pmod{1430}$.
Sanity Check: Check that $x = 1128$ satisfies the original three congruences by direct calculation:

$1128 - 8 = 1120 = 10 \cdot 112$, ok

$1128 - 6 = 1122 = 11 \cdot 102$, ok

$1128 - 10 = 1118 = 13 \cdot 86$, ok !

5. Factorising 126 is easy, we get $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. In particular, $\mathrm{GCD}(5, 126) = \mathrm{GCD}(x^{29}, 126) = 1$ and hence also $\mathrm{GCD}(x, 126) = 1$. So Euler's theorem applies to x. We have $\phi(126) = \phi(2)\phi(3^2)\phi(7) = (2-1)(3^2-3)(7-1) = 36$, thus $x^{36} \equiv 1 \pmod{126}$. Now compute as follows, modulo 126:

$$x^{145} = (x^{36})^4 \cdot x^1 \equiv 1^4 \cdot x^1 \equiv x \equiv (x^{29})^5 \equiv 5^5 \equiv 5^3 \cdot 5^2 \equiv 125 \cdot 25 \equiv (-1) \cdot 25 \equiv 101.$$

Answer: $x \equiv 101 \pmod{126}$.

6. (a) There are perfect matchings, for example

$$M = \{\{a, b\}, \{s, c\}, \{d, e\}, \{f, g\}, \{h, i\}, \{j, t\}\}.$$

(b) For example,

$$s \to a \to b \to d \to e \to g \to h \to i \to t \to j \to f \to c \to s.$$

(c) There are 4 nodes of odd degree, namely s, b, c and t. Hence if we add the edge $\{b, c\}$ there will be an Euler path between s and t. An example of such a path would then be

$$\begin{aligned} &s \to a \to b \to s \to c \to b \to d \to a \to e \to d \to c \to f \to d \\ &\to g \to e \to h \to g \to f \to j \to g \to i \to h \to t \to i \to j \to t. \end{aligned}$$

(d) If we apply the greedy coloring algorithm, starting with s, then continuing in alphabetical order and finishing with t, we will use only 3 colors, as follows:
Color 1: s, d, h, j.
Color 2: a, c, g, t.
Color 3: b, e, f, i.
Hence $\chi(G^*) \leq 3$. But clearly $\chi(G^*) \geq 3$ since the graph has many triangles. So $\chi(G^*) = 3$ and the above is an optimal coloring.

(e) The algorithm could proceed as follows (there are other alternatives).

Step	f-augmenting path	Increase in flow strength
1	$s \to a \to e \to h \to t$	6
2	$s \to b \to d \to g \to i \to t$	4
3	$s \to c \to f \to j \to t$	4
4	$s \to b \to a \to d \to e \to g \to h \to t$	3
5	$s \to c \to d \to e \to g \to j \to t$	3
6	$s \to c \to d \to f \to j \to t$	2
7	$s \to a \to d \to g \to j \to t$	1
Total flow strength		23

The final flow is illustrated in Figure L.6. The set of nodes that can now be reached from s via an augmenting path is $S = \{s, a, b, c, d, e, f, g, j\}$. Sätt $T = V \backslash S = \{h, i, t\}$. Then we have

$$c(S, T) = c(e, h) + c(g, h) + c(g, i) + c(j, t) = 6 + 3 + 4 + 10 = 23 = |f|.$$

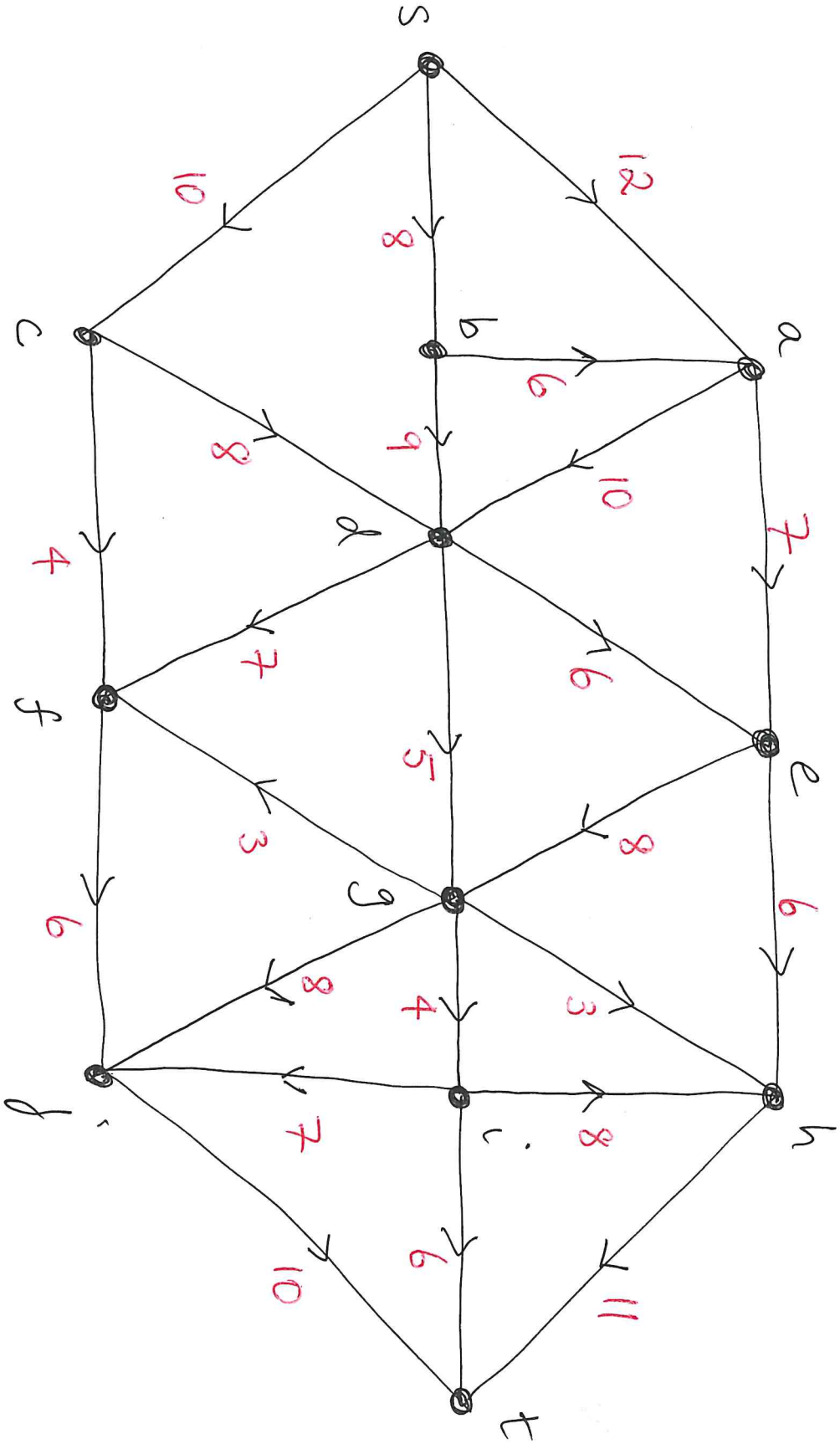
7.

Round	Proposals	Rejections	Strings
1	(α, A), (β, C), (γ, A), (δ, A), (ε, D)	(A, γ), (A, δ)	(A, α), (C, β), (D, ε)
2	(γ, D), (δ, C)	(C, β), (D, γ)	(A, α), (C, δ), (D, ε)
3	(β, A), (γ, B)	(A, α)	(A, β), (B, γ), (C, δ), (D, ε)
4	(α, B)	(B, γ)	(A, β), (B, α), (C, δ), (D, ε)
5	(γ, E)		(A, β), (B, α), (C, δ), (D, ε), (E, γ).

8. Theorem 7.4 in the lecture notes.

9. Theorem 16.4 in the lecture notes.

Figur 6



Figur 7

	A	B	C	D	E
α	1,2	2,3	3,5	4,2	5,1
β	2,1	4,1	1,2	3,1	5,5
γ	1,3	3,5	5,3	2,5	4,3
δ	1,4	4,2	2,1	5,3	3,4
ε	4,5	2,4	5,4	1,4	3,2

$$X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$

$$Y = \{A, B, C, D, E\}$$