Tentamen
MVE505 Diskret Matematik TM1

2022-10-07 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 55 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under VT-2022. Preliminärt så krävs 73 poäng för betyget 4 och 90 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 27 oktober. Granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS! Alla stegen i dina resonemang måste motiveras väl i skrift och alla beräkningar visas. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning av någon av uppgifterna 1-5 åberopar en sats från kurslitteraturen så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen. I uppgift 1 behöver du *inte* ange svaren som explicita decimaltal.

Jag bifogar 3 exemplar av Figurer 4 så att ni har extra kladdpapper.

Var god vänd!

Uppgifterna

1. Let S be the set of all 8-digit numbers, each of whose digits is either 1,2,3,4,5 or 6. How many elements of S are there (15p)

(a) in total ?

(b) in which each of the digits 1-6 appears at least once ?

(c) which have strictly more odd digits than even digits ?

(d) which are even numbers (i.e.: divisible by 2) ?

(e) which are divisible by 3 and of the form $****3636$?

2. Determine an explicit formula for the numbers $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ which satisfy the recursion (12p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3^n + 1, \quad \forall\, n \geq 2.$$

3. (a) Find the general solution of the system of congruences (7p)

$$2x \equiv 1 \pmod 7, \quad 4x \equiv -2 \pmod 9, \quad 7x \equiv 3 \pmod{11}.$$

(b) i. Compute $5^{-1} \pmod{96}$. Write the answer in terms of a number with smallest possible absolute value. (2p)

ii. Determine *all* $n \in \mathbb{Z}$ such that $5^n \equiv 1 \pmod{96}$. Motivate your answer clearly ! (TIPS: $49^2 = 96 \cdot 25 + 1$). (5p)

Var god vänd!

4. (a) Let G be the graph in Figure 4A. (10p)

i. Does G possess an Euler trail and/or circuit ? If so, write one down. If not, say why.

ii. Draw a connected, six-vertex graph which has the same degree sequence as G but is not isomorphic to it. Make sure you explain why the two graphs are not isomorphic.

iii. Let G^* be the graph got by adding the edge $\{b, f\}$ to G. Determine, with proof, $\chi(G^*)$.

(b) Let H be the network in Figure 4B. Apply the Ford-Fulkerson algorithm to determine a maximum flow from s to t and a corresponding minimum cut in G. Write clearly which f-augmenting path you choose at each step. Draw the final flow in full and indicate the corresponding minimum cut. (5p)

5. Let $G = (X, Y, E)$ be a bipartite graph satisfying (7p)

- $|X| = 14$,
- $\deg(v) \geq 4$ for each $v \in X$,
- $\deg(v) \leq 5$ for each $v \in Y$.

Prove that G possesses a matching of size 12 (at least).

6. (a) Define the Stirling numbers $s(n, k)$ of the first kind in terms of permutations. (1.5p)

(b) Define the Stirling numbers $S(n, k)$ of the second kind in terms of balls and bins. (1.5p)

(c) Write down and prove a recursive formula for the latter. Make sure to include the correct boundary values. (9p)

7. Formulate and prove a theorem which determines for which triples (a, b, c) of positive integers the Diophantine equation $ax + by = c$ has a solution and gives a formula for the general solution in that case. (12p)

8. (a) Define what is meant by a *stable matching* for a bipartite dataset. Your definition should include a precise explanation of what is meant by "bipartite dataset". (2p)

(b) Describe the Gale-Shapley algorithm and prove that it always finds a stable matching in a bipartite dataset. (11p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Figure 4A

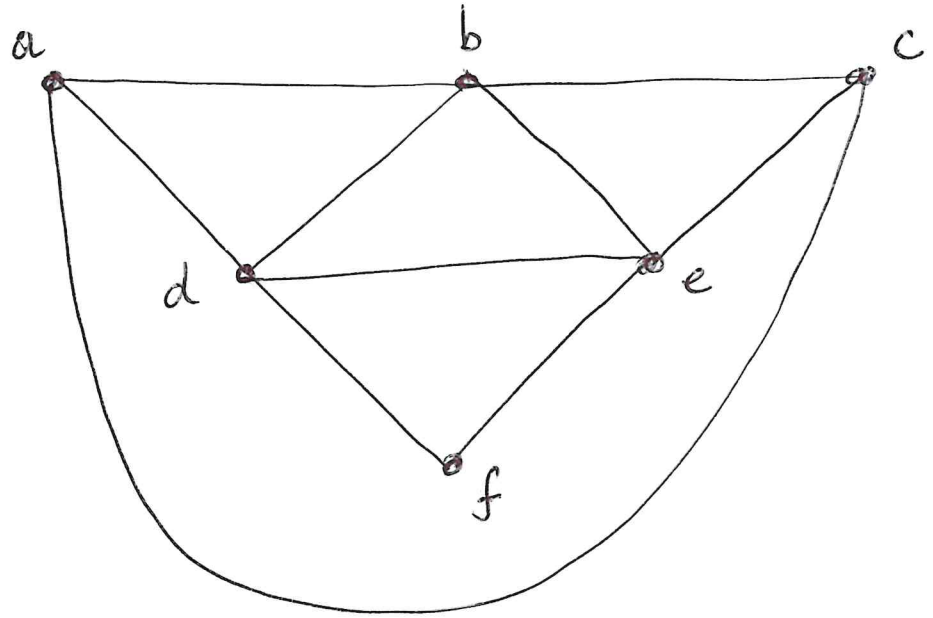

Figure 4B