# Tentamen
# MVE505 Diskret Matematik TM2

### 2022-06-10 kl. 14.00–18.00

**Examinator:** Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

**Hjälpmedel:** Inga

För godkänt på tentan krävs 55 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under VT-2022. Preliminärt så krävs 73 poäng för betyget 4 och 90 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 30 juni. Granskning ordnas därefter av kursansvrig.

---

**OBS!** Alla stegen i dina resonemang måste motiveras väl i skrift och alla beräkningar visas. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning av någon av uppgifterna 1-5 åberopar en sats från kurslitteraturen så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen. I uppgift 1 behöver du *inte* ange svaren som explicita decimaltal.

Jag bifogar 3 exemplar av Figur 4 så att ni har extra kladdpapper.

**Var god vänd!**

## Uppgifterna

**1**. I åk 3 av ett visst civilingenjörsprogram finns 50 studenter och ett utbud av 16 valbara kurser.

(a) Om vi bryr oss om *vilka* studenter som läser vilka kurser, hur många möjligheter finns det för studenternas kursval (6p)

i. om varje student ska välja *en* kurs ?

ii. om varje student kan välja mellan 3 och 5 kurser ?

(b) Alice, Bertil, Cecilia och David har helt olika intressen. Alice och Bertil väljer 3 kurser vardera, medan Cecilia och David väljer 4 kurser vardera. Ingen kurs väljs av två eller fler av dem. Hur många möjligheter finns det för dessa fyra personers kursval ? (3p)

(c) Antag nu, till skillnad från (a) och (b), att vi endast bryr oss om *antalet* studenter som läser varje kurs. Hur många möjligheter finns det (6p)

i. om varje student ska välja en kurs ?

ii. om varje student ska välja en kurs men antalet platser per kurs är begränsad till 24 ?

**2**. Bestäm en formel för talen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller rekursionen (12p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2} + 5 \cdot 2^n - 12n, \quad \forall\, n \geq 2.$$

**3**. (a) Betrakta den Diofantiska ekvationen (8p)

$$317x + 83y = 4000.$$

i. Det är lätt (dvs man behöver inte ta till Euklides algoritm) att se att ekvationen har minst en positiv lösning, dvs en lösning med både $x > 0$ och $y > 0$. Hur syns detta direkt ?

ii. Visa nu hur Euklides algoritm skulle implementeras för att ta fram en lösning. Obs! Du får poäng här för att visa att du förstår hur Euklides algoritm fungerar. M.a.o. du får inga poäng genom att bara skriva upp en lösning som du ser direkt, såsom i (a).

iii. Ange en formel för ekvationens allmänna lösning och skriv upp alla lösningarna som uppfyller $|x| + |y| < 500$.

(b) Bestäm $11^{3167} \pmod{9648}$. Ange svaret som ett tal i intervalet $[0, 9647]$. (6p)

**Var god vänd!**

**4**. Låt $G$ vara nätverket i Figur 4, låt $G^*$ vara den underliggande, oriktade och oviktade grafen och låt $G^{**}$ vara den viktade grafen där endast riktningarna på kanterna tas bort i $G$.

(a) Bestäm med bevis $\chi(G^*)$. (4p)

(b) Tillämpa Dijkstras algoritm för att bestämma en kortaste stig mellan $s$ och $t$ i $G^{**}$. (5p)
OBS! Det viktiga är att du visar att du förstår hur algoritmen fungerar. Därför ska du skriva ner vilken kant som väljs och vilket märke som sätts i varje steg, samt den slutgiltiga kortaste stigen.

(c) Tillämpa Ford-Fulkerson algoritmen för att bestämma ett maximum flöde från $s$ till $t$ och en motsvarande minimum cut i $G$. Ange tydligt vilken $f$-augmenterande stig du väljer i varje steg. Rita det slutgiltiga flödet i sin helhet och indikera motsvarande minimum cut. (5p)

**5**. Låt $n \in \mathbb{Z}_+$. Bevisa att om $G$ är en enkel graf med $2n$ noder som saknar trianglar då har $G$ högst $n^2$ kanter. (7p)

(TIPS: Gör en induktion på $n$).

**6**. Formulera och bevisa Inklusion-Exklusion principen för en union av ändligt många ändliga mängder $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (12p)

**7**. Låt $G$ vara en grupp som verkar till höger på en mängd $S$.

(a) Definiera vad som menas med

i. *fixpunktmängden* av ett element $g \in G$ (1p)

ii. *stabilisatorn* av ett element $s \in S$ (1p)

iii. *banan* av ett element $s \in S$. (1p)

(b) Formulera och bevisa Burnsides lemma för verkan av en ändlig grupp $G$ på en ändlig mängd $S$. (11p)

**8**. (a) Låt $G = (X, Y, E)$ vara en bipartit graf. Definiera vad som menas med

i. *grannskapet* $N(A)$ av en delmängd $A \subseteq X$ (1p)

ii. en $X$-*perfekt* matchning. (1p)

(b) Formulera och bevisa Halls äktenskapsats för bipartita grafer. (10p)

**Go n'eirí an bóthar libh!**

**Lösningar Diskret Matematik TM2, 220610**

**1**. (a) i. Det finns 16 möjligheter per student så enligt MP finns det $16^{50}$ möjligheter totalt.

ii. Varje student ska välja 3, 4 eller 5 kurser. Enligt AP finns det $\binom{16}{3} + \binom{16}{4} + \binom{16}{5}$ möjligheter per student. Därför enligt MP finns det $\left[\binom{16}{3} + \binom{16}{4} + \binom{16}{5}\right]^{50}$ möjligheter totalt.

(b) Det är som att göra ett ord med bokstäverna A, B, C, D, I, där det finns 16 bokstäver totalt varav 3 är A, 3 är B, 4 är C, 4 är D och 2 är I (I representerar en kurs som väljs av ingen av de fyra). Enligt Sats 2.6 är antalet möjligheter $\frac{16!}{3!\,3!\,4!\,4!\,2!}$.

(c) i. Det är som att placera 50 identiska bollar (studenterna, de är identiska eftersom vi bara bryr oss om antalet studenter per kurs) i 16 åtskiljbara lådor (kurserna). Enligt Proposition 1.11 är antalet möjligheter $\binom{50+16-1}{16-1} = \binom{65}{15}$.

ii. Numrera kurserna slumpmässigt från 1 till 16. Låt $X$ vara mängden av alla möjligheterna i föregående deluppgift och för $i = 1, \ldots, 16$ låt $A_i \subset X$ bestå av de alternativ där 25 eller fler studenter väljer kurs nr. $i$. Vi söker $|X \setminus \cup_{i=1}^{16} A_i|$. Notera att högst 2 kurser kan få 25 eller fler studenter. Därför enligt I-E principen har vi att

$$\left|X \setminus \cup_{i=1}^{16} A_i\right| = |X| - \sum_{i=1}^{16} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \overset{\text{symmetri}}{=} \binom{65}{15} - 16 \cdot |A_1| + \binom{16}{2} \cdot |A_1 \cap A_2|. \tag{1}$$

Betrakta först $|A_1|$. Vi kan tänka oss att vi först placerar 25 studenter på kurs nr. 1 och sedan har 25 studenter kvar som kan fördelas fritt. Antalet möjligheter är således $\binom{25+16-1}{16-1} = \binom{40}{15}$.
Sedan betrakta $|A_1 \cap A_2|$. Om 25 studenter placeras på kurser 1 och 2 då finns det inga studenter kvar att fördela. Därmed är $|A_1 \cap A_2| = 1$.
Insättning in i (1) ger slutsvaret

$$\left|X \setminus \cup_{i=1}^{16} A_i\right| = \binom{65}{15} - 16 \cdot \binom{40}{15} + \binom{16}{2}.$$

**2**. *Step 1:* The characteristic equation is $x^2 = 8x - 7$, which has roots $x_1 = 1$, $x_2 = 7$. Hence the general solution of the homogeneous equation is

$$a_{h,n} = C_1 + C_2 \cdot 7^n.$$

*Step 2:* Since 1 is a root of multiplicity one of the characteristic equation, whereas 2 is not a root at all, our choice of a particular solution should look like

$$a_{p,n} = a_{p_1,n} + a_{p_2,n},$$

where

$$a_{p_1,n} = C_3 \cdot 2^n, \quad a_{p_2,n} = C_4 n^2 + C_5 n.$$

Inserting into the recurrence gives, firstly,

$$C_3 \cdot 2^n = 8C_3 \cdot 2^{n-1} - 7C_3 \cdot 2^{n-2} + 5 \cdot 2^n \Rightarrow 4C_3 = 16C_3 - 7C_3 + 20 \Rightarrow C_3 = -4.$$

Secondly,

$$C_4n^2 + C_5n = 8[C_4(n-1)^2 + C_5(n-1)] - 7[C_4(n-2)^2 + C_5(n-2)] - 12n.$$

The coefficients of $n^2$ will cancel exactly. Comparing coefficients of $n$ yields

$$C_5 = -16C_4 + 8C_5 + 28C_4 - 7C_5 - 12 \Rightarrow C_4 = 1.$$

Finally, comparing constant coefficients yields

$$0 = 8C_4 - 8C_5 - 28C_4 + 14C_5 \overset{C_4=1}{\Rightarrow} C_5 = \frac{10}{3}.$$

*Step 3:* Hence, the general solution of the recurrence is

$$a_n = a_{h,n} + a_{p_1,n} + a_{p_2,n} = C_1 + C_2 \cdot 7^n - 2^{n+2} + n^2 + \frac{10n}{3}.$$

Insert the initial conditions:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad a_0 &= 1 = C_1 + C_2 - 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 5, \\ n = 1: \quad a_1 &= 3 = 2C_1 + 7C_2 - 8 + 1 + \frac{10}{3} \Rightarrow C_1 + 7C_2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Solving yields $C_1 = 85/18$, $C_2 = 5/18$ and hence

$$a_n = \frac{5}{18} \cdot 7^n - 2^{n+2} + n^2 + \frac{10n}{3} + \frac{85}{18}.$$

**3.** (a) i. Eftersom $317 + 83 = 400$ så ser vi direkt att $x = y = 10$ är en positiv lösning.

ii. Först Euklides framåt:

$$\begin{aligned} 317 &= 3 \cdot 83 + 68, \\ 83 &= 1 \cdot 68 + 15, \\ 68 &= 4 \cdot 15 + 8, \\ 15 &= 1 \cdot 8 + 7, \\ 8 &= 1 \cdot 7 + 1. \end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned} 1 &= 8 - 7 \\ &= 8 - (15 - 8) \\ &= 2 \cdot 8 - 1 \cdot 15 \\ &= 2(68 - 4 \cdot 15) - 1 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 68 - 9 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 68 - 9(83 - 68) \\ &= -9 \cdot 83 + 11 \cdot 68 \\ &= -9 \cdot 83 + 11(317 - 3 \cdot 83) \\ &\Rightarrow 1 = 11 \cdot 317 - 42 \cdot 83 \\ &\Rightarrow 4000 = 44000 \cdot 317 - 168000 \cdot 83. \end{aligned}$$

Så Euklides algoritm producerar lösningen $x = 44000$, $y = -168000$.

iii. Den allmänna lösningen lyder

$$x = mx_0 - \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = my_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n, \;\; n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

och enligt deluppgift (i) kan vi ta $mx_0 = my_0 = 10$. Vi har dessutom $a = 317$, $b = 83$ och, från deluppgift (ii), $d = 1$. Insättning in i (2) ger

$$x = 10 - 83n, \quad y = 10 + 317n, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Därmed ser vi att de lösningar som uppfyller $|x|+|y| < 500$ är de för $n = -1,\, 0,\, 1$, nämligen $(-73,\, 327)$, $(10,\, 10)$ och $(93,\, -307)$.

(b) Vi vill använda Eulers sats. Först faktoriserar vi basen:

$$\begin{aligned} 9648 = 2 \cdot 4824 = 2^2 \cdot 2412 = 2^3 \cdot 1206 = 2^4 \cdot 603 \\ = 2^4 \cdot 3 \cdot 201 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 67. \end{aligned}$$

Eftersom 11 inte är en faktor så gäller Eulers sats här. Vi har

$$\phi(9648) = \phi(2^4) \cdot \phi(3^2) \cdot \phi(67) = (2^4 - 2^3)(3^2 - 3^1)(67 - 1) = 8 \cdot 6 \cdot 66 = 3168$$

och därmed säger Eulers sats att

$$11^{3168} \equiv 1 \pmod{9648} \;\Rightarrow\; 11^{3167} \equiv 11^{-1} \pmod{9648}.$$

Och eftersom $9647 = 877 \cdot 11$ har vi slutligen att

$$11^{-1} \equiv -877 \equiv 8771 \pmod{9648}.$$

**4.** (a) I claim that $\chi(G^*) = 4$. Since the graph is plane we know a priori that the chromatic number is at most 4. If we color greedily, starting at $s$, then continuing in alphabetical order before finishing at $t$, we will use exactly 4 colors, namely the assigned colors will be

$$1:\, s,\, c,\, h \qquad 2:\, a,\, d,\, g \qquad 3:\, b,\, e,\, f \qquad 4:\, t.$$

Finally, there is a $W_5$-subgraph centered at $g$ and with spokes out to $c$, $e$, $t$, $h$, $f$. This subgraph already requires 4 colors.

(b) The algorithm would proceed as follows. Steps 1-3 are interchangeable, as are Steps 5-6. In Step 8, the edge $\{h, g\}$ could be chosen instead.

| Step | Chosen edge | Label set |
|---|---|---|
| 1 | $\{s, a\}$ | $l(a) := 10$ |
| 2 | $\{s, b\}$ | $l(b) := 10$ |
| 3 | $\{s, d\}$ | $l(d) := 10$ |
| 4 | $\{a, c\}$ | $l(c) := 12$ |
| 5 | $\{c, e\}$ | $l(e) := 15$ |
| 6 | $\{d, f\}$ | $l(f) := 15$ |
| 7 | $\{d, h\}$ | $l(h) := 16$ |
| 8 | $\{e, g\}$ | $l(g) := 18$ |
| 9 | $\{h, t\}$ | $l(t) := 24$ |

Thus the shortest path, of length 24, is $s \to d \to h \to t$.

(c) The algorithm could proceed as follows (there are other alternatives):

| Step | $f$-augmenting path | Increase in flow strength |
|---|---|---|
| 1 | $s \to a \to e \to t$ | 8 |
| 2 | $s \to b \to c \to g \to t$ | 6 |
| 3 | $s \to d \to h \to t$ | 6 |
| 4 | $s \to a \to c \to e \to t$ | 2 |
| 5 | $s \to b \to d \to f \to g \to t$ | 3 |
| 6 | $s \to b \to d \to f \to g \to e \to t$ | 1 |
| 7 | $s \to d \to f \to h \to t$ | 1 |
| Total flow strength | | 27 |

The final flow is illustrated in Figure L.4. The set of nodes that can now be reached from $s$ via an augmenting path is $S = \{s, a, b, d\}$. Sätt $T = V \backslash S = \{c, e, f, g, h, t\}$. Then we have

$$c(S, T) = c(a, e) + c(a, c) + c(b, c) + c(d, f) + c(d, h) = 8 + 2 + 6 + 5 + 6 = 27 = |f|.$$

**5**. Basfall: $n = 1$. Om $G$ har $2n = 2$ noder så har den a priori högst $1 = n^2$ kanter och per definition saknar trianglar.

Induktionssteget: Antag att påståendet gäller för alla grafer på $2n$ noder och låt $G$ vara en graf på $2n + 2$ noder. Om $G$ har inga kanter alls finns det inget att bevisa, så vi kan anta att $G$ har minst en kant. Låt $\{v, w\}$ vara en kant och låt $H$ vara delgrafen som spänns upp av de resterande $2n$ noderna. Om $G$ saknar trianglar då måste även $H$ göra det så enligt induktionshypotesen har $H$ högst $n^2$ kanter. Resterande kanter i $G$ går mellan en nod i $H$ och en av $v$ eller $w$. Men eftersom $\{v, w\}$ är en kant så kan inte $v$ och $w$ ha någon gemensam granne i $H$, för då skulle en triangel skapas. Så varje nod i $H$ är kopplad till högst en av $v$ och $w$, dvs det finns högst $2n$ kanter mellan $H$ och dessa två. Tillsammans med kanten $\{v, , w\}$ har $G$ alltså sammanlagt högst $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ kanter, v.s.v.

**6**. Sats 2.9 i föreläsningsanteckningarna.

**7**. (a) i. $F_g(S) = \{s \in S : sg = s\}$.

ii. $\mathrm{Stab}_G(s) = \{g \in G : sg = s\}$.

iii. $\mathrm{Orb}(s) = sG = \{sg : g \in G\} = \{s' \in S : \exists\, g \in G,\ sg = s'\}$.

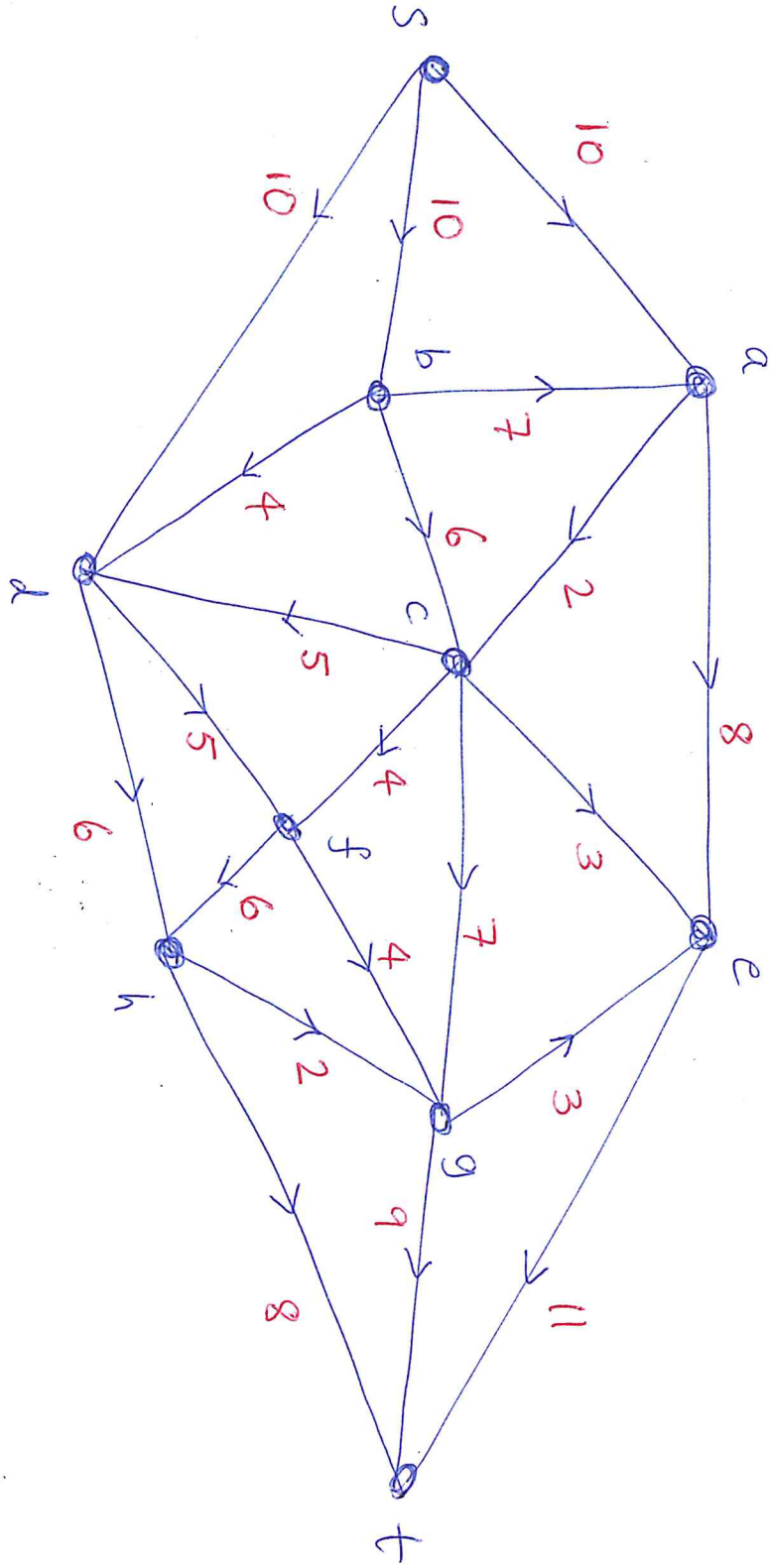
(b) Sats 14.14 i föreläsningsanteckningarna.

**8**. (a) i. $N(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in X,\ \{x,\, y\} \in E\}$.

ii. En $X$-perfekt matchning är en matchning där varje $x \in X$ matchas.

(b) Sats 19.8 i föreläsningsanteckningarna.

# Figur 4



# Figure L.4