Tentamen
MVE505 Diskret Matematik TM1

2022-06-03 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentan krävs 55 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från inlämningsuppgifterna under VT-2022. Preliminärt så krävs 73 poäng för betyget 4 och 90 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens Canvassida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 24 juni. Granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS! Alla stegen i dina resonemang måste motiveras väl i skrift och alla beräkningar visas. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning av någon av uppgifterna 1-5 åberopar en sats från kurslitteraturen så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen. I uppgift 1 behöver du *inte* ange svaren som explicita decimaltal.

Jag bifogar 3 exemplar av Figur 4A så att ni har extra kladdpapper.

Var god vänd!

Uppgifterna

1. I engelska Premier League spelar 20 lag. Säsongen 2021-22 har precis tagit slut.

(a) Hur många möjlighter finns det för slutställningen (dvs placeringen av lagen från 1-20) (8p)

i. om man vet vilka 20 lag som spelade i årets upplaga men inget mer ?

ii. om man bara vet vilka 92 lag som spelar i den engelska ligan sammanlagt och att det handlar om 20 av dessa ?

iii. om man vet vilka 20 lag som var med i PL och dessutom att minst en av Burnley och Watford blev nedflyttade[1], dvs hamnade på någon av de 3 sista positionerna ?

(b) Vann gjorde Manchester City, vars facit var 29 vinster, 6 oavgjorda och 3 förluster. Hur många möjligheter ger detta för det detaljerade facitet som anger resultatet (vinst, oavgjort eller förlust) på varje enskild match som de spelade ? (3p)

(c) De 20 lagen gjorde totalt 1071 mål under säsongen. Minst antal mål gjorde Norwich med 23 st. Alla övriga lag gjorde minst 24 mål var. Hur många möjligheter lämnar detta för listan av antalet gjorda mål per lag ? (3p)

2. Bestäm en formel för talen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller rekursionen (12p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_n = 8a_{n-1} - 12a_{n-2} + 2^{n+1} + 10, \quad \forall\, n \geq 2.$$

3. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (8p)

$$116x - 35y = 1000$$

samt alla lösningarna som uppfyller $|x| + |y| < 300$.

(b) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ har kongruensen (5p)

$$70x \equiv b \pmod{232}$$

en lösning ? Välj något sådant b (ditt val !), förutom $b = 0$, och bestäm den allmänna lösningen i det fallet.

Var god vänd!

[1] Båda nedflyttades faktiskt. Men det vet man *ej* i denna uppgift. Det enda man vet är att *minst en* av dem blev nedflyttade.

4. (a) Låt G vara nätverket i Figur 4A och låt G^* vara den underliggande, oriktade och oviktade grafen.

i. Lägg till så få kanter som möjligt till G^* så att den resulterande grafen är fortsatt enkel men har en Eulerkrets. Ange också en explicit Eulerkrets i denna graf. (3p)

ii. Tillämpa Ford-Fulkerson algoritmen för att bestämma ett maximum flöde från s till t och en motsvarande minimum cut i G. Ange tydligt vilken f-augmenterande stig du väljer i varje steg. Rita det slutgiltiga flödet i sin helhet och indikera motsvarande minimum cut. (6p)

(b) Tillämpa Gale-Shapley algoritmen för att hitta en stabil matchning för datan i Figur 4B. Använd konventionen att det är elementen i X som friar. Skriv tydligt vilka frianden och avslag som utdelas och tillståndet för strängarna i varje steg, samt den slutgiltiga stabila matchningen. (6p)

5. Bevisa att om varje kant i K_6 färgas antingen röd eller blå, det måste finnas en monokrom triangel (dvs en K_3-delgraf där alla kanterna har samma färg). (7p)

6. Formulera och bevisa Inklusion-Exklusion principen för en union av ändligt många ändliga mängder $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (12p)

7. (a) Formulera och bevisa Lagranges sats för grupper. (10p)

(b) Formulera Eulers sats i modulär aritmetik och förklara hur den följer från Lagranges sats (här räcker det med en skiss, du behöver inte ge alla detaljerna). (5p)

8. Formulera och bevisa satsen av Dirac som säger informellt att en enkel graf med tillräckligt många kanter som är tillräckligt jämnt fördelade garanteras ha en Hamiltoncykel. (12p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Diskret Matematik TM1, 220603

1. (a) i. Det är helt enkelt antalet sätt att ordna de 20 lagen, alltså 20!.

ii. Man måste välja 20 lag från 92 st med hänsyn till ordning, så antalet möjligheter är $P(92,\,20) = \frac{92!}{72!}$.

iii. Svaret är $20! - N$, där N är antalet slutställningar där varken Burnley eller Watford finns bland de 3 sista lagen. För att bestämma N kan vi tänka oss att vi

- först väljer 3 av de 18 övriga lagen för nedflyttningspositionerna. Hänsyn ska tas till ordning så detta val kan göras på $P(18,\,3) = 18 \cdot 17 \cdot 16$ sätt

- sedan ordnar de resterande 17 lagen, vilket kan göras på 17! sätt.

Enligt MP är således $N = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 17!$, vilket medför att svaret på uppgiften är $20! - 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 17! = 17!(20 \cdot 19 \cdot 18 - 18 \cdot 17 \cdot 16) = 108 \cdot 18!$.

(b) Det är som att göra ett ord med 38 bokstäver, varav 29 är V, 6 är O och 3 är F. Enligt multinomialsatsen är antalet möjliga ord $\frac{38!}{29!\,6!\,3!}$.

(c) Här placerar vi identiska bollar (målen) i åtskiljbara lådor (lagen). Först ska Norwich få 23 mål och alla övriga lagen ska få 24 mål var. Då har man kvar $1071 - (19 \cdot 24 + 23) = 592$ bollar som kan fördelas valfritt bland de 19 lagen förutom Norwich. Enligt Proposition 1.11 är antalet möjligheter för fördelningen $\binom{592+19-1}{19-1} = \binom{610}{18}$.

2. *Step 1:* The characteristic equation is $x^2 = 8x - 12$, which has roots $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Hence the general solution of the homogeneous equation is

$$a_{h,\,n} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 6^n.$$

Step 2: Since 2 is a root of multiplicity one of the characteristic equation, whereas 1 is not a root at all, our choice of a particular solution should look like

$$a_{p,\,n} = a_{p_1,\,n} + a_{p_2,\,n},$$

where

$$a_{p_1,\,n} = C_3 \cdot n \cdot 2^n, \quad a_{p_2,\,n} = C_4.$$

Inserting into the recurrence gives, firstly,

$$C_4 = 8C_4 - 12C_4 + 10 \Rightarrow C_4 = 2.$$

Secondly,

$$C_3\, n\, 2^n = 8C_3(n-1)2^{n-1} - 12C_3(n-2)2^{n-2} + 2 \cdot 2^n.$$

The coefficients of $n2^n$ will cancel exactly and comparing coefficients of 2^n yields

$$0 = -\frac{8C_3}{2} + \frac{12C_3 \cdot 2}{2^2} + 2 \Rightarrow C_3 = -1.$$

Step 3: Hence, the general solution of the recurrence is

$$a_n = a_{h,\,n} + a_{p_1,\,n} + a_{p_2,\,n} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 6^n - n2^n + 2.$$

Insert the initial conditions:

$$n = 0: \quad a_0 = 1 = C_1 + C_2 + 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = -1,$$
$$n = 1: \quad a_1 = 4 = 2C_1 + 6C_2 - 1 \cdot 2^1 + 2 \Rightarrow C_1 + 3C_2 = -2.$$

Solving yields $C_1 = -5/2$, $C_2 = 3/2$ and hence

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot 6^n - (2n+5) \cdot 2^{n-1} + 2.$$

3. (a) Först Euklides framåt:

$$\begin{aligned} 116 &= 3 \cdot 35 + 11, \\ 35 &= 3 \cdot 11 + 2, \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 \\ &= 11 - 5(35 - 3 \cdot 11) \\ &= 16 \cdot 11 - 5 \cdot 35 \\ &= 16(116 - 3 \cdot 35) - 5 \cdot 35 \\ \Rightarrow 1 &= 16 \cdot 116 - 53 \cdot 35. \end{aligned} \tag{1}$$

Den allmänna lösningen (notera minustecknet !) lyder

$$x = mx_0 - \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = my_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

och enligt (1) har vi här $x_0 = 16$, $y_0 = 53$, $m = 1000$, $a = 116$, $b = 35$, $d = 1$. Insättning in i (2) ger

$$x = 16000 - 35n, \quad y = 53000 - 116n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tar vi $n = \lfloor \frac{16000}{35} \rfloor = 457$ får vi lösningen $x = 5$, $y = -13$, vilket är den som minimerar $|x| + |y|$. Övriga lösningar som uppfyller $|x| + |y| < 300$ är de som svarar mot $n = 455, 456, 458$, nämligen respektivt $(75, 219)$, $(40, 103)$, $(-30, -129)$.

(b) Notera från del (a) att $\mathrm{SGD}(35, 116) = 1$. Eftersom $70 = 2 \cdot 35$ och $232 = 2 \cdot 116$ så följer det att $\mathrm{SGD}(70, 232) = 2$. Därmed har kongruensen en lösning om och endast om b är en multipel av 2.

Sätt $b = 2c$. Då gäller att

$$70x \equiv b \pmod{232} \;\Leftrightarrow\; 35x \equiv c \pmod{116} \;\Leftrightarrow x \equiv 35^{-1}\, c \pmod{116}.$$

Men enligt (1) så är $35^{-1} \equiv -53 \equiv 63 \pmod{116}$, vilket ger den allmänna lösningen $x \equiv 63 \left(\frac{b}{2}\right) \pmod{116}$.

4. (a) i. Det finns 6 noder av udda grad, nämligen s, b, c, d, f, g. Om vi lägger till t.ex. de tre kanterna $\{s, b\}$, $\{c, g\}$, $\{d, f\}$ så får vi en graf som är fortsatt enkel och där varje nod har nu jämn grad. Denna graf har således en Eulerkrets och ett exempel på en sådan är

$$\begin{aligned} &s \to a \to b \to s \to c \to b \to g \to t \to h \to g \to c \to e \to b \\ &\to h \to e \to t \to i \to e \to f \to i \to d \to c \to f \to d \to s. \end{aligned}$$

ii. Exemeplvis skulle algoritmen kunna fortskrida såhär (det finns andra alternativ):

Steg	f-augmenterande stig	Ökning i flödets styrka
1	$s \to a \to b \to g \to t$	4
2	$s \to a \to b \to h \to t$	2
3	$s \to c \to e \to t$	7
4	$s \to c \to e \to h \to t$	1
5	$s \to d \to i \to t$	7
6	$s \to d \to c \to f \to e \to h \to t$	2
Sammanlagd flödesstyrka		23

Det slutgiltiga flödet illustreras i Figur L.4. Mängden av noder som nu kan nås från s via en augmenterande stig är $S = \{s, a, c, d, i\}$. Sätt $T = V \backslash S = \{b, e, f, g, h, t\}$. Då har vi

$$c(S, T) = c(a, b) + c(c, e) + c(c, f) + c(i, t) = 6 + 8 + 2 + 7 = 23 = |f|.$$

(b) Algoritmen fortskrider enligt följande tabell. Tillståndet på strängarna efter Steg 3 ger den slutgiltiga stabila matchningen.

Steg	Frianden	Avslag	Strängarna
1	(α, A), (β, B), (γ, B), (δ, A)	(A, δ), (B, β)	(A, α), (B, γ)
2	(β, A), (δ, B)	(A, α), (B, γ)	(A, β), (B, δ)
3	(α, D), (γ, C)	inga	(A, β), (B, δ), (C, γ), (D, α)

5. Föreställ dig att de 6 noderna representerar personer, och att en kant färgas blå (resp. röd) om dessa två är vänner (resp. fiender). Vi måste bevisa att oavsett relationerna mellan de 6 personerna måste det antingen finnas en grupp av 3 omsesidiga vänner eller en grupp av 3 omsesidiga fiender.

Betrakta en person, spelar ingen roll vilken. Kalla honom för P. Det finns 5 övriga personer och eftersom $5 > 2 \cdot 2$, enligt lådprincipen måste P antingen ha minst 3 vänner eller minst 3 fiender.

WLOG antag att P har minst 3 vänner - det blir samma argument om han har minst 3 fiender, bara man byter ut ordet "vän" mot "fiende" överallt. Om två som helst av hans vänner är också vänner då har vi en grupp av 3 omsesidiga vänner, nämligen dessa två plus P. Enda alternativet är att alla P:s vänner är omsesidiga fiender, men då utgör dessa en grupp på minst 3 omsesidiga fiender.

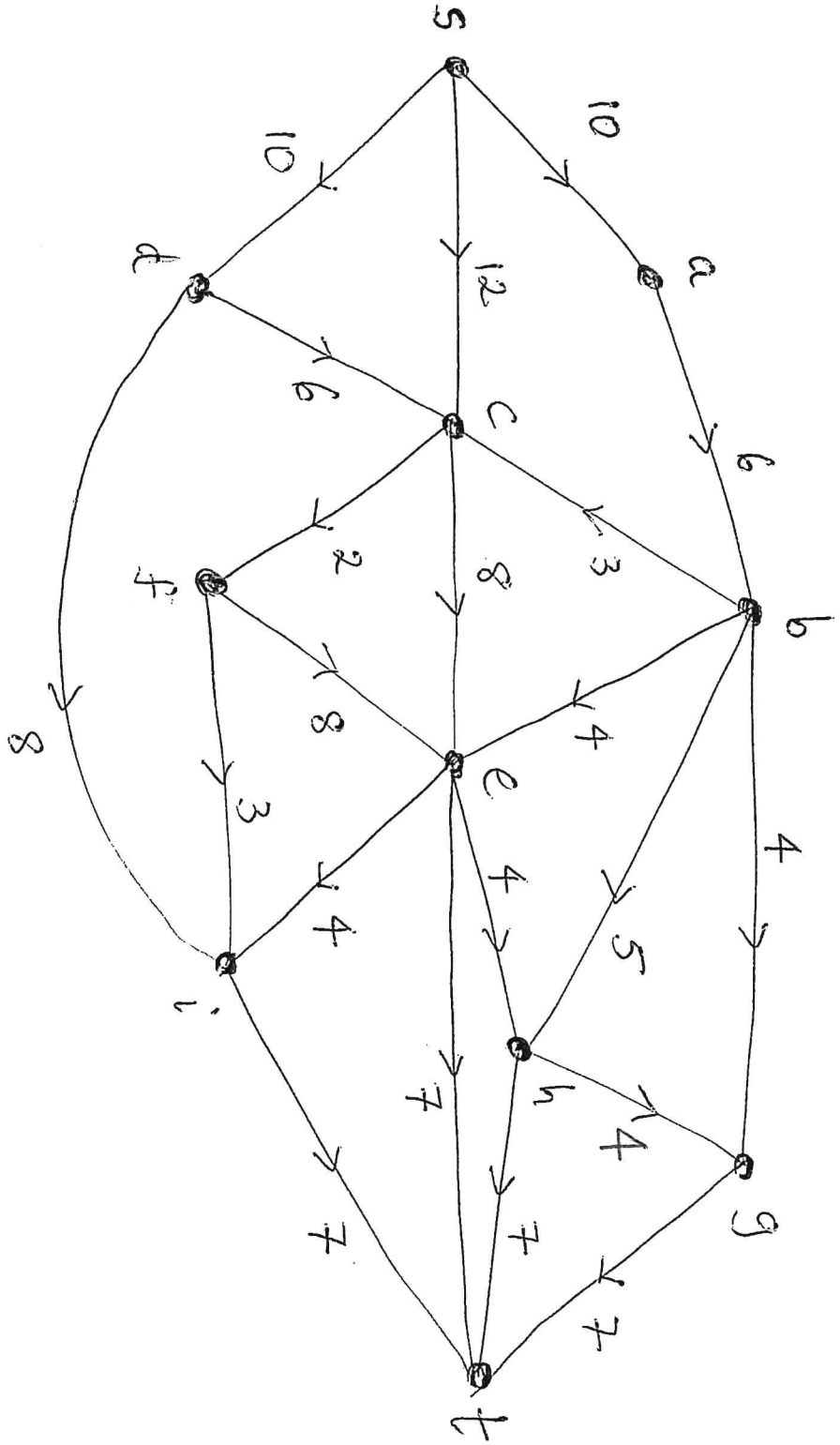
6. Sats 2.9 i föreläsningsanteckningarna.

7. (a) Sats 9.13 i föreläsningsanteckningarna.

(b) Eulers sats är Sats 11.7 i föreläsningsanteckningarna. Den följer från Sats 9.13 via Korollarium 9.15, när den senare tillämpas på den mulktiplikativa gruppen $\mathbb{Z}_n^\times$.

8. Sats 16.4 i föreläsningsanteckningarna.

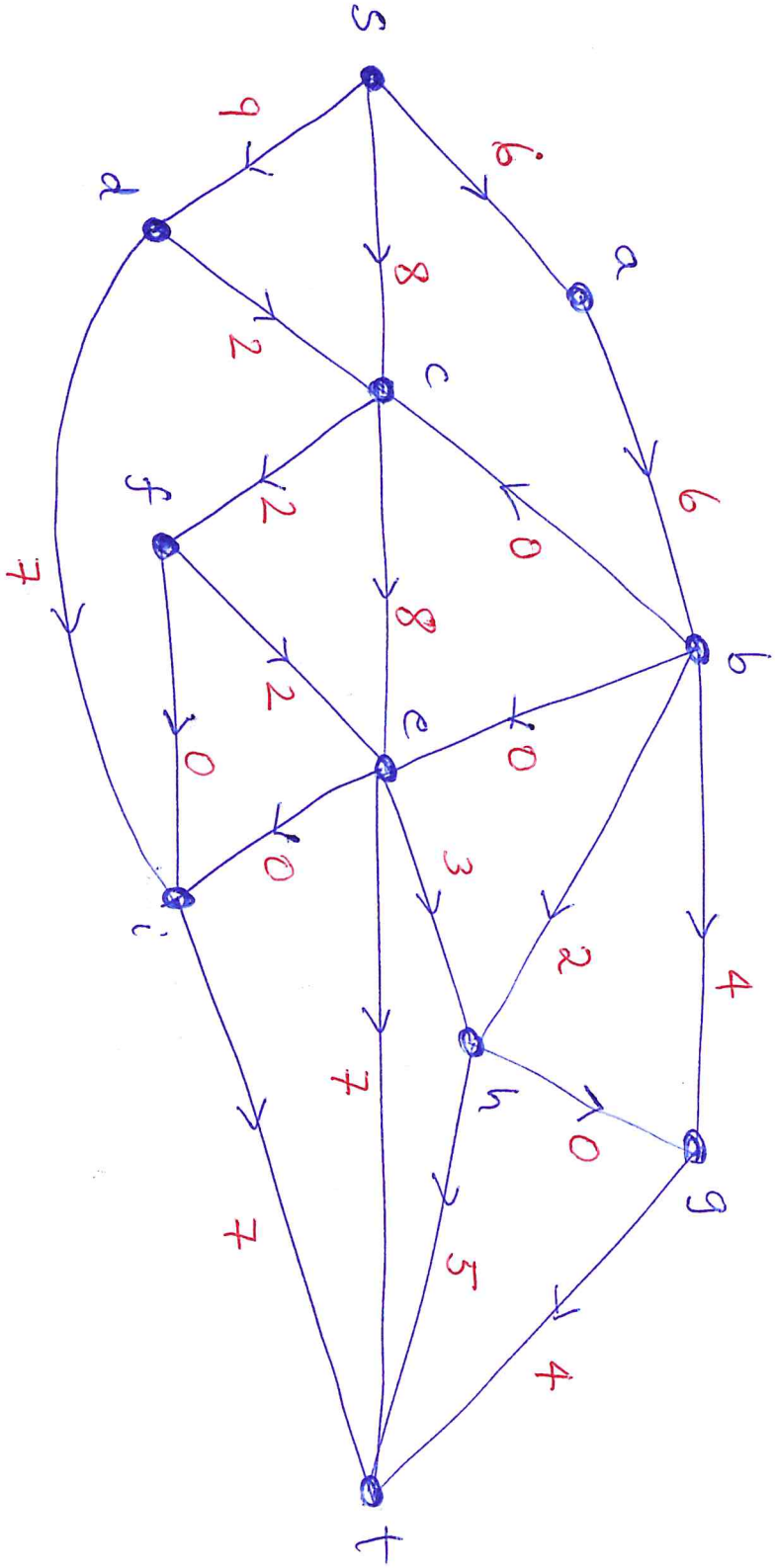
Figur 4A



Figur 4B

	A	B	C	D
α	1, 3	3, 2	4, 3	2, 1
β	2, 2	1, 4	3, 4	4, 3
γ	3, 1	1, 3	2, 1	4, 2
δ	1, 4	2, 1	3, 2	4, 4

$$X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

$$Y = \{A, B, C, D\}.$$

Figur L.4