# Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2020-03-17

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83
wastlund@chalmers.se.

Skrivtid: 14.00 – 18.00. (Inlämning 18.30 enligt de nya rutinerna).

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs 20, 28 respektive 36 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. (a) Vilket är det minsta positiva heltal som kan uttryckas på formen $4543x - 6667y$, där $x$ och $y$ är heltal?

   (b) Förkorta så långt som möjligt bråket 4543/6667.

2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i polynomiell tid i längden av input? På den har uppgiften behöver ingen motivering ges till svaren. En poäng per rätt utöver 5.

   (a) Avgöra om en graf har en eulercykel.

   (b) Avgöra om en graf har en hamiltoncykel.

   (c) Turings stopp-problem (halting problem).

   (d) Hitta ett minimalt spännande träd i en graf med viktade kanter.

   (e) Hitta den kortaste vägen mellan två noder i en graf.

   (f) Avgöra om ett tal är primtal.

   (g) Finna en primfaktor till ett givet tal.

   (h) Beräkna $a^b$ modulo $c$, där $a$, $b$ och $c$ är givna tal.

   (i) Hitta ett $x$ (om det finns) som löser kongruensen $a \cdot x \equiv b \pmod{c}$, där talen $a$, $b$ och $c$ är givna.

   (j) Hitta ett $x$ (om det finns) som löser kongruensen $x^a \equiv b \pmod{c}$, där talen $a$, $b$ och $c$ är givna.

3. (a) Beräkna principalresten av $11^{1000}$ modulo 37.

   (b) Modulo 37 har vi $2^{19} \equiv -2$, $3^{19} \equiv 3$, $4^{19} \equiv 4$, $5^{19} \equiv -5$ osv. Förklara det här mönstret, dvs varför $x^{19}$ alltid är kongruent med antingen $x$ eller $-x$ modulo 37.

4. Kan följande position nås i det så kallade femtonspelet? Motivera ditt svar!

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| | 15 | 14 | 13 |

5. Om man kastar två vanliga tärningar och sorterar dem efter utfall, finns 21 möjliga kombinationer. Hur många finns det för 3, 4 respektive 5 tärningar?

6. (a) Om vi singlar slant 8 gånger, vad är då sannolikheten att vi får 4 krona och 4 klave?

   (b) Om vi singlar slant $2n$ gånger, vad är då sannolikheten att vi får exakt $n$ krona och $n$ klave? Ange ett exakt uttryck samt en approximation då $n \to \infty$, till exempel genom att använda Stirlings formel och förenkla.

7. På hur många sätt kan man färga de 6 talen $0, \ldots, 5$ med tre färger, om färgningar räknas som samma när de kan överföras i varandra genom "rotationer", dvs addition modulo 6?

8. Alice och Bob spelar ett spel av samma typ som sten-sax-påse, det vill säga man visar samtidigt ett tecken med handen och man måste bestämma sig utan att veta vad motståndaren gör. Man visar antingen ett eller två fingrar. Om de visar olika, får Bob en poäng. Om båda visar ett, får Alice en poäng, men om båda visar två, får Alice 2 poäng.

   Föreslå en strategi för Alice för att hon på bästa sätt ska kunna utnyttja sin fördel!

# Svar till tentamen MVE505, 2020-03-17

1. (a) Det minsta positiva heltalet som kan uttryckas som $4543x - 6667y$ är sgd(4543, 6667) $= 59$.

   (b)
   $$\frac{4543}{6667} = \frac{77}{113}.$$

2. Algoritmer i polynomiell tid är kända för (a), (d), (e), (f), (h) och (i).

3. (a) $11^{1000} \equiv 26 \pmod{37}$.

   (b) Enligt Fermats sats har vi $x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ om $x \not\equiv 0$. Det innebär att
   $$x^{36} - 1 = (x^{18} + 1)(x^{18} - 1) \equiv 0.$$
   Eftersom vi räknar modulo ett primtal måste då någon faktor vara kongruent med noll. Därför är $x^{18}$ kongruent med 1 eller $-1$, och $x^{19}$ kongruent med $x$ eller $-x$.

4. Permutationen består av 8 parvisa platsbyten, och är därför jämn. Då den tomma rutan ska flyttas ett udda antal steg, kan den givna positionen EJ nås.

5. Det finns 56, 126, respektive 252 möjliga kombinationer.

6. (a) Sannolikheten för 4 krona och 4 klave är $70/256 = 35/128$.

   (b) Sannolikheten för $n$ krona och $n$ klave är
   $$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

7. “Lemmat som inte är Burnsides” ger
   $$\frac{729 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 27}{6} = 130.$$

8. Alice kan vinna 1/5 poäng i snitt per omgång genom att visa 1 med sannolikhet 3/5, alltså 60%, och 2 med sannolikhet 2/5 = 40%.