Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2019-08-28

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Skrivtid: 14.00 – 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven “formelsamling” på ett A4-ark (2 sidor). Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs 20, 28 respektive 36 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $57x + 141y = 3585$.

2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i tid polynomiell i längden av input? På den har uppgiften behöver ingen motivering ges till svaren. En poäng per rätt utöver 5.

   (a) Avgöra om en graf har en 4-färgning. (b) Sortera en lista av heltal. (c) Multiplicera två heltal. (d) Avgöra om en graf har en hamiltoncykel. (e) Avgöra om en graf har en perfekt (fullständig) matchning. (f) Hitta den kortaste vägen mellan två noder i en graf. (g) Avgöra om en graf är sammanhängande. (h) Avgöra om ett tal är primtal. (i) Finna en primfaktor till ett givet tal. (j) Beräkna a^b modulo c, där a, b och c är givna tal.

3. (a) Beräkna inversen till 7 i ringen $\mathbb{Z}_{400}$.

   (b) Beräkna 2^{73} (mod 73).

4. En talföljd definieras av att

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \text{ för } n \geq 0. \end{cases}$$

   Ange ett explicit uttryck för a_n.

5. Antag att n är ett positivt heltal. Låt f vara den avbildning av mängden $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ på sig själv som ges av $f(x) = x + 5 \pmod{n}$. Är f alltid en permutation? I så fall, är denna permutation jämn eller udda? Beror det på värdet av n?

6. I spelet yatzy kastar man 5 vanliga sexsidiga tärningar. I spelet finns regler om att man får spara tärningar och kasta om de andra, men här antar vi att man bara kastar tärningarna en gång.

   (a) Vad är sannolikheten att man får "yatzy", dvs samma siffra på alla fem tärningarna?

   (b) Vad är sannolikheten att man får "Liten Straight", dvs en etta, en tvåa, en trea, en fyra och en femma?

7. Nisse och Lisa spelar ett spel av samma typ som sten-sax-påse, det vill säga man visar samtidigt ett tecken med handen och man måste bestämma sig utan att veta vad motståndaren kommer att göra. Man visar antingen ett eller två fingrar.

   Nisse ska försöka gissa vad Lisa tänker visa, och själv visa samma. Om de visar samma tecken, får Nisse 1 respektive 2 poäng beroende på hur många fingrar de visade. Om de visar olika, får ingen någon poäng (bara Nisse kan få poäng alltså, så ska det bli rättvist får de byta roller sedan).

   Hur många poäng kan Nisse garanterat få i genomsnitt per omgång med en bra strategi?

8. Sidoytorna på en vanlig kubisk tärning är traditionellt numrerade med siffrorna 1-6 på ett särskilt sätt så att till exempel sidan 1 sitter mitt emot sidan 6. Men antag att vi tillåter vilken numrering som helst där var och en av siffrorna 1 till 6 förekommer exakt en gång. Hur många sätt finns det då att numrera sidorna på kuben, om numreringar betraktas som samma ifall de kan överföras i varandra genom rotation av kuben?

Svar till tentamen MVE505, 2019-08-28

1. Två lösningar, $(6, 23)$ och $(53, 4)$.

2. Problemen (b), (c), (e), (f), (g), (h) och (j) kan lösas i polynomiell tid. (a), (d), (h) kan så vitt man vet inte lösas i polynomiell tid.

3. (a) Inversen till 7 i ringen $\mathbb{Z}_{400}$ är 343.

   (b) $2^{73} \equiv 2 \pmod{73}$.

4. Talföljden ges av

$$a_n = \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

5. Funktionen f är alltid en permutation. Den är jämn om n är udda och udda om n är jämnt.

6. I spelet yatzy kastar man 5 vanliga sexsidiga tärningar. I spelet finns regler om att man får spara tärningar och kasta om de andra, men här antar vi att man bara kastar tärningarna en gång.

   (a) Sannolikheten för "yatzy" är $1/6^4 = 1/1296$.

   (b) Sannolikheten för "Liten Straight" är $5!/6^5 = 5/324$.

7. Nisse kan vinna 2/3 i snitt peromgång genom att välja 1 med sannolikhet 2/3 och 2 med sannolikhet 1/3.

8. Det finns 30 olika numreringar av kubens sidor.