Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2019-06-12

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven “formelsamling” på ett A4-ark (2 sidor). Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs 20, 28 respektive 36 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $98x + 161y = 4536$.

2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i tid polynomiell i längden av input? På den har uppgiften behöver ingen motivering ges till svaren. En poäng per rätt utöver 5.

   (a) Avgöra om en graf har en 3-färgning.

   (b) Sortera en lista av heltal.

   (c) Multiplicera två heltal.

   (d) Givet en graf, hitta den största mängd av noder i vilken alla par av noder är förbundna med en kant.

   (e) Beräkna antalet spännande träd till en graf.

   (f) Avgöra om en graf är smmanhängande.

   (g) Avgöra om ett tal är primtal.

   (h) Finna en primfaktor till ett givet tal.

   (i) Beräkna a^b modulo c, där a, b och c är givna tal.

   (j) Hitta ett x (om det finns) som löser kongruensen $x^a \equiv b \pmod{c}$, där talen a, b och c är givna.

3. (a) Beräkna inversen till 7 i ringen $\mathbb{Z}_{289}$.
   (b) Beräkna $10^{68} \pmod{67}$.

4. En talföljd definieras av att

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2, \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n, \ \text{för } n \geq 0. \end{cases}$$

   Ange ett explicit uttryck för a_n.

5. Går följande position att nå i 15-spelet?

1	12	11	10
2	13		9
3	14	15	8
4	5	6	7

6. Hur många delmängder finns det av mängden $\{1, \ldots, 20\}$ som inte innehåller två tal vars differens är delbar med 3?

7. Nisse och Lisa spelar ett spel med en hög med tändstickor, där ett drag består i att ta bort 1, 4 eller 7 stickor. Den som tar sista stickan vinner. Om de startar med 100 stickor, vad är då ett bra första drag?

8. Sidoytorna på en vanlig kubisk tärning är traditionellt numrerade med siffrorna 1-6 på ett särskilt sätt så att till exempel sidan 1 sitter mitt emot sidan 6. Men antag att vi tillåter vilken numrering som helst. Hur många sätt finns det att numrera sidorna på en kub med siffrorna 1-6, om numreringar betraktas som samma ifall de kan överföras i varandra genom rotation av kuben?

Svar Diskret Matematik MVE505, 2019-06-12

1. Det finns två lösningar, $x = 20, y = 16$ samt $x = 43, y = 2$.

2. Man känner till algoritmer i polynomiell tid för problem b, c, e, f, g, i, men inte för de övriga.

3. (a) Inversen till 7 i ringen $\mathbb{Z}_{289}$ är 124.

   (b) $10^{68} \equiv 33 \pmod{67}$.

4. Ett sätt att uttrycka följden är

$$a_n = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2} \cdot (1 + \sqrt{3})^n + \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{2} \cdot (1 - \sqrt{3})^n.$$

5. Ett sätt att koda positionen som en permutation (där den tomma rutan har nummer 16) är

$$(1)(2\ 5\ 14\ 10\ 4\ 13\ 6\ 15\ 11\ 3\ 9\ 8\ 12)(7\ 16)$$

   Detta är en udda permutation. Eftersom den tomma rutan är ett udda antal (3) steg ifrån sitt startläge, går positionen att nå.

1	12	11	10
2	13		9
3	14	15	8
4	5	6	7

6. Hur många delmängder finns det av mängden $\{1, \ldots, 20\}$ som inte innehåller två tal vars differens är delbar med 3?

   I en sådan mängd kan det finnas högst ett tal ur varje kongruensklass modulo 3. För klasserna $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ och $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$ finns 8 möjligheter vardera: antingen är ett av de 7 talen med, eller inget av dem. För klassen $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ finns på samma sätt 7 möjligheter. Det finns därför $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ sådana mängder.

7. P-positionerna blir de antal som är kongruenta med 0, 2 eller 5 modulo 8 (man ser mönstret om man räknar tillräckligt långt). Det innebär att bland andra 90, 93 96 och 98 är P-positioner. Det finns därför två bra drag från 100: Ta bort 4 till 96 eller ta bort 7 till 93.

8. Utan hänsyn till symmetrier blir det $6! = 720$ sätt. Men eftersom kuben har 24 rotationssymmetrier blir det $720/24 = 30$ sätt. Detta kan ses som en tillämpning av Burnsides lemma (där ingen "färgning" är fixerad under någon annan än den triviala symmetrin), eller så kan man räkna genom att konstatera att det finns 15 sätt att para ihop talen 1-6 för att bestämma vilka som ska sitta mitt emot varandra, och därefter två möjliga orienteringar för varje hopparning.