Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2019-03-19

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor). Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs 20, 28 respektive 36 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. (a) Vilket är det minsta positiva heltal som kan uttryckas på formen $13579x - 11744y$, där x och y är heltal?

   (b) Förkorta så långt det går bråket 13579/11744.

2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i tid polynomiell i längden av input? På den har uppgiften behöver ingen motivering ges till svaren. En poäng per rätt utöver 5.

   (a) Avgöra om en graf har en 4-färgning.

   (b) Avgöra om en graf har en eulercykel.

   (c) Avgöra om en graf har en hamiltoncykel.

   (d) Avgöra om en graf har en perfekt (fullständig) matchning.

   (e) Hitta den kortaste vägen mellan två noder i en graf.

   (f) Avgöra om en graf är ett träd.

   (g) Avgöra om ett tal är primtal.

   (h) Finna en primfaktor till ett givet tal.

   (i) Beräkna a^b modulo c, där a, b och c är givna tal.

   (j) Hitta ett x (om det finns) som löser kongruensen $x^a \equiv b \pmod{c}$, där talen a, b och c är givna.

3. Om vi räknar modulo 101, är $1^{67} \equiv 1$, $8^{67} \equiv 2$, $27^{67} \equiv 3$ och $64^{67} \equiv 4$. Förklara det här mönstret, och hitta ett x sådant att $x^{67} \equiv 10$.

4. För $n = 7$, 9 respektive 11, skriv upp med cykelnotation den permutation av talen $1, \ldots, n-1$ som ges av funktionen $x \mapsto 2x \pmod n$. Avgör i respektive fall om det är en jämn eller udda permutation.

5. Om man kastar två vanliga tärningar och sorterar dem efter utfall, finns 21 möjliga kombinationer. Hur många finns det för 3, 4 respektive 5 tärningar?

6. Ada, Beppe och Cilla spelar ett kortspel där man börjar med att dela ut korten i en standardkortlek med två (särskiljbara) jokrar, totalt 54 kort. De får 18 kort var.

   (a) Ange ett uttryck för det exakta antalet möjliga givar.

   (b) Förklara varför detta antal blir approximativt

$$3^{54} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36\pi}.$$

7. På hur många sätt kan man färga sidoytorna på en regelbunden oktaeder med q färger, om färgningar räknas som samma när de kan överföras i varandra genom rotationer av oktaedern? Vad blir antalet för $q = 2$?

8. Odd och Eva spelar ett spel av samma typ som sten-sax-påse, det vill säga man visar samtidigt ett tecken med handen och man måste bestämma sig utan att veta vad motståndaren kommer att göra. Man visar antingen ett eller två fingrar. Om det totala antalet fingrar är udda (dvs spelarna visar olika) vinner Odd, och om det är jämnt (spelarna visar lika) vinner Eva.

   Den som vinner får ett antal poäng lika med det totala antalet fingrar som visades. Odd får alltså 3 poäng om han vinner, men Eva kan vinna 2 eller 4.

   Visa att Odd kan spela på ett sådant sätt att han i det långa loppet får fler poäng än Eva! Hur mycket kan han dra ifrån i genomsnitt per omgång med en bra strategi?

Svar till tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2019-03-19

1. (a) Det minsta tal som kan uttryckas på formen $13579x - 11744y$ där x och y är heltal är 367 (största gemensamma delaren).

   (b) Bråket $13579/11744 = 37/32$.

   Några har svarat att det förkortade bråket är $15/13$, men 15 och 13 (med rätt tecken) var värdena på x och y, vilket inte är samma sak.

2. De beräkningsproblem man känner till algoritmer som går i polynomiell tid för är b, d, e, f, g och i. Här trodde några att även j går att lösa i polynomiell tid, men detta kräver med dagens algoritmer att man kan faktorisera talet c.

3. Mönstret förklaras av Fermats sats. Vi har $(x^3)^{67} = x^{201}$, vilket enligt Fermats sats är kongruent med x, eftersom 101 är ett primtal.

   Kongruensen $x^{67} \equiv 10$ har lösningen $x = 1000$, eller om man så vill, $x = 91$ eller $x = 10$ (alla dessa svar är korrekta).

4. Permutationerna är $(124)(365)$ som är jämn, $(124875)(36)$ som också är jämn, samt (12485109736), som är udda.

5. För 3, 4 respektive 5 tärningar finns det $\binom{8}{5} = 56$, $\binom{9}{5} = 126$ respektive $\binom{10}{5} = 252$ olika kombinationer.

6. (a) Antalet möjliga givar är $\binom{54}{18} \cdot \binom{36}{18}$. Detta kan öven skrivas som en multinomialkoefficient: $\binom{54}{18,18,18}$.

   (b) Med hjälp av Stirlings formel kan detta approximeras till

$$3^{54} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36\pi}.$$

Den huvudsakliga faktorn blir 3^{54}. Alla faktorer e kancellerar, vi får tre faktorer $\sqrt{\pi}$ i nämnaren och en i täljaren, vilket förenklas till en faktor π i nämnaren. Övriga faktorer kan förenklas till $\sqrt{3}/36$.

På (b) fick man en poäng för att ha angett "Stirlings formel" även om man inte klarade att skriva upp den och göra förenklingarna (men det krävdes inte, full poäng till dem som räknat rätt utan att komma ihåg att han hette Stirling).

7. Med Burnsides lemma fås att antalet färgningar är

$$\frac{q^8 + 17q^4 + 6q^2}{24},$$

vilket i fallet $q = 2$ ger 23.

8. Här gäller det att ange en blandad strategi för Odd som vinner i längden oavsett vad Eva gör. Det bästa visar sig vara för Odd att visa ett finger med sannolikhet 7/12 och två med sannolikhet 5/12. Då kommer Eva att i väntevärde förlora 1/12 per omgång oavsett om hon visar ett eller två fingrar.

   Ganska många hävdade att Odd borde visa ett finger varje gång, vilket vore det bästa om Eva skulle singla slant för att göra sitt val. Men om Odd kan visa ett finger varje gång, kan ju Eva också göra det!