

# Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2018-06-08

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Skrivtid: 14.00 – 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor).  
Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng). För betygen 4 och 5 krävs 28 respektive 36 poäng.

1. Vilket är det minsta positiva heltal som kan uttryckas som  $861x - 492y$ , där  $x$  och  $y$  är heltal? Ge ett exempel på värden av  $x$  och  $y$  som ger detta minimum.
2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i polynomiell tid? På den har uppgiften behöver ingen motivering ges till svaren.
  - (a) Bestämna antalet uppspännande träd för en given graf.
  - (b) Avgöra huruvida ett givet tal är primtal.
  - (c) Finna en primfaktor till ett givet tal.
  - (d) Avgöra om en given graf är sammanhängande.
  - (e) Avgöra om en graf är 3-färgbar.
3. De tre mängderna  $A$ ,  $B$  och  $C$  har 55 element vardera. Vidare är  $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 21$ , och  $|A \cap B \cap C| = 8$ . Hur många element har mängden  $A \cup B \cup C$ ? Rita gärna ett Venndiagram!
4. På hur många sätt kan man färga sidoytorna på en kub med tre färger, om färgningar räknas som samma när de kan överföras i varandra genom rotationer av kuben?

5. Bestäm det minsta icke-negativa tal som är kongruent med

(a)  $9^{100} \pmod{13},$

(b)  $10^{100} \pmod{97}.$

6. En talföljd definieras av att

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n, \text{ för } n \geq 0. \end{cases}$$

Visa att

$$a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n,$$

för alla  $n$ .

7. (a) Låt  $f$  vara den avbildning  $\{0, 1, 2, \dots, 18\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 18\}$  som ges av  $f(x) = x^3 \pmod{19}$ .

Är  $f$  en permutation, och i så fall, är denna permutation jämn eller udda?

(b) Motsvarande för talet 23: Om  $g : \{0, 1, 2, \dots, 22\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 22\}$  ges av  $g(x) = x^3 \pmod{23}$ , är då  $g$  en permutation, och i så fall, jämn eller udda?

8. En graf har noder numrerade  $0, 1, 2, \dots, 15$ , och två noder är förbundna med en kant om (och endast om) nodernas nummer, skrivna binärt, skiljer sig åt på endast en position.

(a) Har denna graf någon hamiltonväg?

(b) Har den någon eulerväg?

# Svar till tentamen i Diskret Matematik

## MVE505, 2018-06-08

1. Det minsta värdet är 123. Exempel på  $x$  och  $y$  är  $x = -1$ ,  $y = -2$  och  $x = 3$ ,  $y = 5$ .
2. (a), (b) och (d) har kända algoritmer som går i polynomiell tid, men inte (c) och (e).
3. 110.
4.  $(3^6 + 3 \cdot 3^4 + 12 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2)/24 = 57$ .
5. Svar 9 på både (a) och (b).
6. Detta visas med induktion. Induktionssteget hänger på att  $(5/2)^{n+1} + 3 \cdot (5/2)^n \leq (5/2)^{n+2}$ .
7. Avbildningen i (a) är ingen permutation, eftersom till exempel  $f(2) = f(3)$ . I (b) är funktionen  $g$  en jämn permutation: Talen 0 och  $\pm 1$  avbildas på sig själva, medan övriga 20 restklasser permuteras enligt  $(2\ 8\ 6\ 9\ 16)(3\ 4\ 18\ 13\ 12)(5\ 10\ 11\ 20\ 19)(7\ 21\ 15\ 17\ 14)$ , vilket är en jämn permutation.
8. (a) Ja, se begreppet *Graykod*. (b) Ja, ty grafen är sammanhängande och varje nod har jämn grad (4).