Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2018-03-13

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Skrivtid: 14.00 – 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor). Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng). För betygen 4 och 5 krävs 28 respektive 36 poäng.

1. På den här uppgiften behöver endast svar anges (ingen motivering behöver ges).
   (a) Vilken/vilka av mängderna $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, och $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ är uppräkneliga?
   (b) Ge ett exempel på ett NP-fullständigt beräkningsproblem.
   (c) Hur många uppspännande träd har grafen K_5?
   (d) Kommer en enkel slumpvandring på det tvådimensionella gittret $\mathbb{Z}^2$ tillbaka till utgångspunkten oändligt många gånger?

2. Hur många lösningar i positiva heltal har ekvationen
$$224x + 144y = 10000?$$

3. Tre mängder A B och C har 17, 24 respektive 45 element. Vidare är $|A \cup B| = 32$, $|A \cup C| = 51$, $|B \cup C| = 48$, och $|A \cup B \cup C| = 53$. Hur många element har mängden $A \cap B \cap C$? Rita gärna ett Venndiagram!

4. Finn ett explicit uttryck för den talföljd som ges av
$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, \text{ för } n \geq 0. \end{cases}$$

5. Bestäm det minsta ickenegativa tal som är kongruent med

   (a)
   $$13^{100} \pmod{70},$$

   (b)
   $$2^{100} \pmod{97}.$$

6. Kan man nå den här ställningen från den vanliga startpositionen i 15-spelet?

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

7. På hur många sätt kan man färga siffrorna 0 till 9 med två olika färger (säg röd och blå), om färgningar räknas som samma när de kan överföras i varandra genom att man adderar en konstant modulo 10? Till exempel räknas den färgning där talen 2, 4 och 9 är röda som samma som den där 5, 7 och 2 är röda, eftersom den senare fås genom att man skiftar 3 steg modulo 10.

8. Vi konstruerar en graf med 12 noder, där 10 noder är numrerade med siffrorna 0 till 9, och de två sista är märkta J och U. Två siffernoder är förbundna med en kant om differensen mellan siffrorna är 1, och dessutom har noden J kanter till de jämna siffernoderna, och U kanter till de udda siffernoderna. Det finns inga ytterligare kanter.

   (a) Har denna graf någon Hamiltoncykel?

   (b) Hur många färger krävs för att färga noderna så att inga noder med en gemensam kant har samma färg?

Svar till tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2018-03-13

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng). För betygen 4 och 5 krävs 28 respektive 36 poäng.

Notera att detta är svar och kortfattade kommentarer, ej fullständiga lösningar!

1. (a) $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ är uppräkneliga.
   (b) Handelsresande, hamiltoncykel, 3-färgning.
   (c) 125 (Cayleys formel).
   (d) Ja, en enkel slumpvandring på det tvådimensionella gittret $\mathbb{Z}^2$ kommer tillbaka till utgångspunkten oändligt många gånger.
2. Ekvationen har 5 positiva lösningar, $(8, 57), (17, 43), \ldots, (44, 1)$.
3. Mängden $A \cap B \cap C$ har 8 element.
4. Ett explicit uttryck är
$$a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.$$
5. (a)
$$13^{100} \equiv 1 \pmod{70},$$
   eftersom redan $13^4 \equiv 1$.
   (b)
$$2^{100} \equiv 2^4 = 16 \pmod{97},$$
   eftersom $2^{96} \equiv 1$ enligt Fermats sats.
6. Ställningen är en udda permutation, och den tomma rutan befinner sig ett udda antal steg från det nedre högra hörnet, så det går att lösa.

7. Enligt Burnsides lemma:

$$\frac{1024 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 32}{10} = 108.$$

8. (a) Det finns hamiltoncykler (går att rita ut eller beskriva).
   (b) Det krävs två färger, en för U och de jämna talen, en för J och de udda talen.