

Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2017-08-14

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Skrivtid: 14.00 – 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven "formelsamling" på ett A4-ark (2 sidor).
Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Tre mängder A , B och C har 100 element vardera. De tre skärningarna $A \cap B$, $A \cap C$ och $B \cap C$ har 25 element vardera, och $|A \cap B \cap C| = 8$. Hur många element har mängden $A \cup B \cup C$? Rita gärna ett Venndiagram!
2. Vilka av följande beräkningsproblem vet man idag är NP-fullständiga?
 - (a) Avgöra huruvida ett tal med n siffror är ett primtal.
 - (b) Avgöra huruvida en graf med n noder har en hamiltoncykel.
 - (c) Avgöra huruvida en graf med n noder har en eulercykel.
 - (d) Avgöra huruvida en graf med n noder kan färgas med 2 färger.
 - (e) Avgöra huruvida en graf med n noder kan färgas med 3 färger.
3. Bestäm alla lösningar i positiva heltal till ekvationen

$$357x + 245y = 3199.$$

4. Om man kastar fem vanliga tärningar, vad är då sannolikheten att man får en triss, men inte ett fyrtal, dvs tre av tärningarna ger samma utfall, men de två övriga ger något annat?

5. Låt $n = 39012586410043$. Med dator kan man enkelt konstatera att

$$2^{n-1} \equiv 25062144872803 \pmod{n}.$$

Förklara hur denna information gör att vi kan avgöra huruvida n är ett primtal eller inte.

6. Siffrorna $0, 1, 2, \dots, 9$ kan permuteras genom avbildningen $x \mapsto 3x \pmod{10}$.

(a) Ta reda på pariteten hos denna permutation, dvs om den är jämn eller udda.

(b) Vad blir pariteten om vi i stället väljer avbildningen $x \mapsto 3x + 1$?

7. En talföljd definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 5, \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n. \end{cases}$$

Finn en sluten formel för a_n !

8. Låt G vara en graf där hörnen är numrerade från 1 till 10, och där det går en kant mellan två noder om och endast om noderna är olika och det ena numret är en multipel av det andra (noden 3 har till exempel kanter till 1, 6, och 9). Har G någon hamiltonväg?

Svar till tentamen i Diskret Matematik

MVE505, 2017-08-14

1. Mängden $A \cup B \cup C$ har 233 element.
2. Hamiltoncykel och 3-färgning är NP-fullständiga. Övriga kan lösas i polynomiell tid, och är alltså inte NP-fullständiga såvida inte $P=NP$.
3. Ekvationen har visserligen heltalslösningar, till exempel $(-13, 32)$ och $(22, -19)$, men den saknar lösningar i positiva heltal.
4. $10 \cdot 6 \cdot 5^2 / 6^5 = 125/648$.
5. Då 2^{n-1} ej är kongruent med 1 modulo n , följer enligt Fermats sats att n inte är ett primtal.
6. (a) Talen 0 och 5 avbildas på sig själva, medan övriga tal kan delas in i två 4-cykler, en med talen 1, 3, 7, 9 och en med talen 2, 4, 6, 8. Permutationen är därför jämn.
(b) När föregående permutation sätts samman med den cykliska permutation (med 10 element) som ges av addition med 1, blir resultatet en udda permutation.
7. En sluten formel är $a_n = 2^n + 3^n$.
8. Grafen saknar hamiltonväg. Detta kan till exempel inses genom att noderna med nummer större än eller lika med 4 bara kan förekomma som ändpunkter eller intill någon av noderna 1 eller 2 (de har högst en annan granne). Det finns 7 sådana noder, och med två ändpunkter och en sådan nod före och efter vardera av noderna 1 och 2 blir det bara 6 som kan finnas i en väg.