Tentamen i Diskret Matematik MVE505, 2017-06-09

Examinator: Johan Wästlund, tel 073-500 25 83.

Skrivtid: 14.00 – 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Handskriven “formelsamling” på ett A4-ark (2 sidor). Ej miniräknare!

Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Tre mängder A B och C har 20 element vardera. Vidare är $|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 5$, $|B \cap C| = 9$, och $|A \cap B \cap C| = 2$. Hur många element har mängden $A \cup B \cup C$? Rita gärna ett Venndiagram!

2. För vilka av följande beräkningsproblem känner man idag till algoritmer som går i polynomiell tid?

   (a) Avgöra huruvida ett tal med n siffror är ett primtal.

   (b) Avgöra huruvida en graf med n noder har en hamiltoncykel.

   (c) Avgöra huruvida en graf med n noder har en eulercykel.

   (d) Avgöra huruvida en graf med n noder kan färgas med 2 färger.

   (e) Avgöra huruvida en graf med n noder kan färgas med 3 färger.

3. Hur många punkter med två heltalskoordinater finns på linjesegmentet från punkten $(0, 4200)$ till punkten $(8190, 0)$? Låt oss säga att vi räknar med ändpunkterna.

4. En partikel startar en endimensionell slumpvandring i origo, och går i varje steg antingen ett steg åt höger eller ett steg åt vänster, med sannolikhet $1/2$ vardera, och oberoende av tidigare steg.

   (a) Vad är sannolikheten att partikeln är tillbaka i origo efter 8 steg?

(b) Vad är sannolikheten att partikeln är tillbaka i origo efter 8 steg *och* under dessa steg aldrig har besökt punkten -1?

5. Bestäm det minsta ickenegativa tal som är kongruent med

   (a)
   $$3^{18} \pmod{37},$$

   (b)
   $$13^{33} \pmod{64}.$$

6. Talen $0, 1, 2, \ldots, 10$ kan permuteras genom avbildningen $x \mapsto 2x \pmod{11}$, som avbildar talet x på $2x$ reducerat modulo 11.

   (a) Ta reda på pariteten hos denna permutation, dvs om den är jämn eller udda.

   (b) Gör motsvarande för avbildningen $x \mapsto 3x$.

7. Nisse och Lisa spelar ett spel där man turas om att dra bort 1, 3, eller 6 stickor från en hög med tändstickor. Den som tar sista stickan vinner. Plötsligt ser Lisa att det är exakt 52 stickor kvar i högen. Föreslå ett drag för Lisa!

8. Vi skriver upp en följd av n tal, där varje tal måste vara 1, 2 eller 3, med restriktionen att ettor och tvåor måste alternera sinsemellan, dvs mellan två ettor måste det alltid någonstans finnas en tvåa, och mellan två tvåor måste det någonstans finnas en etta. På hur många sätt kan detta göras?

Svar till tentamen i Diskret Matematik
MVE505, 2017-06-09

1. Mängden $A \cup B \cup C$ har 44 element.
2. Primalitet, eulercykel och 2-färgning är i P. Hamiltoncykel och 3-färgning ligger inte i P, såvida inte P=NP.
3. 211 med ändpunkterna, eftersom sgd(4200, 8190) = 210.
4. (a) 35/128, (b) 7/128.
5. (a) 1, (b) 13.
6. (a) Udda, (b) Jämn.
7. Ta bort 3 (P-positionerna har ett mönster med periodicitet 9).
8. $2^{n+1} - 1$.