

## Tentamen: Miljö och Matematisk Modellering (MVE346) för TM Åk 3, ES61-ES63 klockan 08.30 den 31:a maj, 2016.

För uppgifter som kräver en numerisk lösning så skriv ned ditt svar och hur du gick till väga för att lösa uppgiften (använd helst inte programkod), lägg till eventuella grafer eller illustrationer och spara svaren som separata pdf-filer i mapparna C:\\_EXAM\_\Assignments\Uppgift1, C:\\_EXAM\_\Assignments\Uppgift2, osv. För att kunna få delpoäng vid felaktigt svar krävs att man beskriver lösningsansatsen, delsteg (exempelvis m.h.a. "pseudokod" dvs konceptuell implementeringsbeskrivning) och att man resonerar om de erhållna resultaten. För uppgifter som endast kräver analytiska lösningar eller ett resonerade svar kan ni välja att antingen skriva dessa på datorn eller för hand. Skriv namnet på den dator ni använder på den fysiska mappen som ni lämnar till tentavakten.

Betygsgränser: 12 p för 3:a, 16p för 4:a, 20p för 5:a. Max är 24p.

Lärarkontakt under tentamen: Erik Sterner, telefonnummer: 0709720196

---

1. Förklara de tre olika delstrategierna för dematerialisering, samt ge exempel för var och en av dessa tre olika strategier. Visa med dessa förklaringar och exempel att du förstår vad strategierna innebär. (3p)
2. För två av de största förväntade globala klimateffekterna med omfattande konsekvenser för mänskliga samhällen, beskriv klimateffekterna, deras konsekvenser för mänskliga samhällen som drabbas av dem och var de förväntas skapa mest skada. (2p)

### 3. Kolcykeln

Du ska först implementera en förenklad kolcykelmodell och utföra en simulering med denna (3a), sedan ska du i några deluppgifter problematisera kring denna förenklade beskrivning av kolcykeln (3b-3d).

#### (a) Hypotetiskt utsläppsscenario

Beräkna förändringen i mängden koldioxid i atmosfären jämfört med en opåverkad jämviktsnivå (som skulle kunna jämföras med den förindustriella situationen).

Till ditt förfogande har du ett impulssvar för hur den atmosfäriska mängden CO<sub>2</sub> påverkas av en utsläppsimpuls givet att inget fossil kol har släppts ut tidigare. Anta att impulsvaren består av en summation av exponentialfunktioner med olika relaxationstider ( $\tau_i$ )

$$f(t) = \sum_i A_i e^{-t/\tau_i}$$

$i$	$A_i$	$\tau_i$ [år]
1	0,1130	2,0
2	0,2130	12,2
3	0,2580	50,4
4	0,2730	243,3
5	0,1430	$\infty$ <sup>1</sup>

Var tydlig med att ange övriga eventuella antaganden.

---

<sup>1</sup> Tips: Oändligheten ska ni kunna mata in som INF, annars kan du approximera det med ett väldigt stort tal.

Antag att utsläppen börjar på 0 Gt CO<sub>2</sub> per år vid år 0 och sedan växer med 0,04 GtCO<sub>2</sub> per år till år 1000. Under år 1001-2000 är utsläppen stabila på utsläppsnivån från år 1000. År 2001-3000 minskar sedan utsläppen med 0,04 GtCO<sub>2</sub> per år från nivån år 2000. Avslutningsvis upphör utsläppen helt och hållet år 3001, dvs 0 GtCO<sub>2</sub> släpps ut per år under perioden 3001-4000. Antag att alla utsläpp är enbart av fossilt kol. Implementera modellen, konstruera scenariot, simulera, illustrera och reflektera över hur mängden CO<sub>2</sub> i atmosfären förändras över de 4000 åren. **(3p)**

**(b) Konstruktion av konceptuell kolcykelmodell**

Konstruera och illustrera en konceptuell modell av den riktiga kolcykeln som ger oss bättre förståelse för vad som skulle hända med koldioxidutsläppen.

Möjliggör i illustrationen så att vi kan följa hur mängden kol i olika komponenter av kolcykeln samt flödena mellan de olika komponenterna skulle utvecklas över tid vid olika utsläpp av fossilt kol till atmosfären. (Tips: Ta en hel sida åt frågorna 3b och 3c samt lämna utrymme så att du får plats med svaret i fråga 3c när du besvarar 3b) **(2p)**

**(c) Användning av konceptuell modell**

Använda samma utsläppsscenario som i fråga 3a). Markera på ett lämpligt sätt i den konceptuella modellen från fråga 3b) vad som förväntas hända med mängderna kol i de olika komponenterna och flödena mellan dem vid följande tidpunkter: år 0, år 500, år 1500, år 2500 och år 10000. Dessa tidpunkter är före och mitt under utsläppens tre första faser samt långt efter att utsläppen försvunnit = blivit 0 Gt CO<sub>2</sub> per år. **(2p)**

**(d) Atmosfärisk koldioxid och temperaturförändring**

Med hjälp av din konceptuella modell och ditt svar i fråga 3c), visa med en kvalitativ graf ungefärligt hur mängden koldioxid i atmosfären förändras under detta 4000 åriga utsläppsscenario (beskrivet i fråga 3a). Med en kvalitativ graf menas här att inga exakta siffror förväntas utan fokus är på riktningar och relativa förändringshastigheter under de olika "årtusendena". Med en motsvarand kvalitativ graf visa sen grovt vilken temperaturförändring detta utsläppsscenario skulle ge upphov till. **(3p)**

**4. Spelteori**

Tänk er två länder A och B som delar på tillgång till en och samma förorenade sjö. Tidigare har sjön använts för att fiska, men nu är den förorenad och inget land kan längre använda sjön för fiske. Förlusten är lika stor för båda länderna. Vi kan sätta nyttofunktionen vid denna förlust (för fortsatt förorenad sjö) till 0.

Båda länderna skulle tjäna på att få sjön ren igen, och de får isåfall lika stor inkomst med nytta N av sjön. Den totala kostnaden som krävs för att rena sjön är K: Om både länderna bidrar till arbetet, delar de jämnt på kostnaderna. Om bara ett land rensar sjön tar det landet fulla kostnaden (men även om det andra landet inte gör något, så får det hela nyttan N av att sjön är ren igen).

**(a)** Skriv upp spelarnas strategier och de olika utfallen som ett spel mellan två spelare på standardform av en 2x2-matris **(1p)**

**(b)** Vilka av de fyra strategival som visas i matrisen är Nash-jämvikter? Besvara denna fråga under två olika scenarier: (i) Om  $N > K$  (ii)  $N < K$ . **(2p)**

**(c)** Kan något av fall (i) eller fall (ii) beskrivas som "det kollektiva handlandets problem"? **(1p)**

## 5. Populationsdynamik och bärkraftig avkastning

Ni ska analysera den diskreta logistiska avbildningen som beskriver en fiskpopulation och ett antal fiskare med tillväxttakt  $r$ . Fiskpopulationen beskrivs av dynamiken:

$$x_{(t+1)} = r \cdot x_t(1 - x_t)$$

Varje fiskare fiskar med konstant insats  $q=0.3$  i systemet, vilket återspeglar den maximala effektiviteten hos en fiskebåt. Den totala insatsen blir då  $n \cdot q$  där  $n$  är antalet fiskare. Den nya dynamiken blir:

$$x_{(t+1)} = r \cdot x_t(1 - x_t) - n \cdot q \cdot x_t$$

- För dynamiken med fiskare, beräkna fixpunkter och avkastningen analytiskt. Välj sedan en fixpunkt och kontrollera om den fixpunkten är stabil. **(3p)**
- Beräkna den maximala bärkraftiga avkastningen med avseende på  $r$  för optimalt  $n$  då populationen är nollskild och visualisera (plotta) på lämpligt sätt. **(2p)**

*Lycka till!*

# Exempel på studentlösningar med fulla poäng alt. bedömningsanvisningar

## Uppgift 1

### Student 1:

De tre strategierna som dematerialisering kan delas upp i är:

- Att minska material-mängden för en tjänst/produkt.
- Att använda tjänsten/produkten längre.
- Att återanvända materialet.

Nedan följer exempel för dessa tre strategier:

#### Minska material-mängden

Ett exempel för när man använt strategin av att minska material-mängden för en tjänst/produkt är inom aluminiumburksindustri för olika drycker. Man har under de senaste decennierna lyckats förbättra tillverkningen av burkarna sådana att det krävs en mindre mängd aluminium för varje burk än vad det tidigare krävts.

#### Använda tjänsten/produkten längre

Ett exempel för en produkt där användandet förlängs är cyklar. Istället för att köpa en ny cykel uppmanas man att laga den, och om man inte har behov av den att man då istället säljer den vidare/skänker den oavsett vilket skick cykeln är i. Cykelcaféer där man kan laga/sälja sin begagnade cykel börjar dyka upp samt cykeldagar (som även sker på Chalmers). Cykeldagarna går ut på att man kan ta med sin egen cykel för att laga den, eller gå för att hämta ut en trasig cykel som har skänkts och därefter laga den på plats med hjälp av verktyg och kunnande som finns där.

#### Återanvända materialet

Ett exempel för när man använt strategin av att återanvända material är också inom burk- samt flaskindustrin för olika drycker. I Sverige har man även infört pant, det vill säga att man betalar en extra kostnad för varje burk/flaska man köper som man sedan får tillbaka när man lämnar tillbaka burken/flaskan till återvinning, för att öka återanvändandet av materialet som burkarna/flaskorna är gjorda av.

### Student 2:

Dematerialisering innebär att minska mängden resurser/material som används, och därmed minska de totala negativa effekterna (ex utsläpp vid tillverkning eller mängd metall som går åt).

Det finns tre vanliga delstrategier för dematerialisering

- Använd igen (återvinning)
- Använd längre
- Använd en mindre mängd material

Använd igen: genom att använda samma material flera gånger behöver vi inte utvinna nya råvaror för att tillverka nya produkter. Exempel på detta är att panta burkar/flaskor. Istället för att metallen går till spillo så kan den användas igen.

Använd längre: Om vi använder våra produkter längre så behöver vi inte producera nya produkter i lika hög grad. Detta skulle minska negativa effekter på klimatet. Exempel på detta är att regelbundet se över sin bil och lämna den på service då det behövs. Detta förlänger livslängden på bilen, vilket såklart är bra!

Använd en mindre mängd: Om vi kan tillhandahålla samma tjänst/produkt för en mindre mängd material så vinner vi såklart på detta. Ett exempel är "miniatyrisering". Det har behövts mindre och mindre mängd aluminium för att tillverka burkar. Telefoner har också följt denna trend (dock inte nu längre när vi ser större telefoner, vilket dock beror på att telefonerna har fått större funktionalitet).

## Uppgift 2 - Förväntade klimateffekter

### Student 1:

#### Översvämningar

En förväntad klimateffekt är översvämningar som kommer att leda till att fler människor tvingas flytta från sina hem. Detta beror på stigande havsnivåer till följd av ökade temperaturer och kommer främst drabba områden som ligger lågt, nära vatten. Ett exempel är Bangladesh som i framtiden kommer att bli översvämmat

#### Ökenutbredning

På grund av ökad medeltemperatur på jorden kommer det att bli torrare vilket leder till att ökenområden kommer att breda ut sig. Detta innebär att marker som tidigare gått att odla på nu blir obrukbara vilket kommer leda till svält och att fler människor tvingas flytta för att söka efter mat. Detta kommer att drabba områden där det redan finns öken då dessa kommer att breda ut sig. Dessutom kan skövlingar av exempelvis regnskog att leda till att nya områden blir öken.

### Student 2:

En allvarlig klimateffekt är höjda vattennivåer som en följd av temperaturhöjning. Det sker genom att vatten expanderar vid ökad temperatur samt smältande isar vid polerna. Detta kan få ödesdigra följder för människor som är bosatta vid kust eller lågt liggande inland då översvämningar tvingar folk på flykt då hela samhällen hamnar under vattenytan, alternativt leder till kostsamma insatser för att skydda kustremsor. Folkströmningar får även stor global påverkan, exempelvis ser vi idag hur rådande "flyktingkris" får konsekvenser långt bortom drabbade områden. En annan förväntad klimateffekt är den att områden med mycket nederbörd kommer att se ökad nederbörd med risk för översvämningar och områden med utbredd torka kan komma att få än mindre nederbörd. Torka påverkar såklart människor negativt med dålig tillgång på dricksvatten, uteblivna skördar med mera. Gemensamt för många stundande klimateffekter är att de slår allra hårdast mot de fattiga då de ofta står utanför samhällets olika skyddsnät i form av tillgång på sjukvård, ekonomiskt stöd vid förlust av tillgångar och andra sociala tjänster. I utvecklingsländer kan även brist på infrastruktur göra det svårt för boende att förflytta sig från akut utsatta platser samt försvåra insatser utifrån.

### Uppgift 3

#### Bedömningsanvisningar Uppg 3

- a) Beräkna förändringen i mängden koldioxid i atmosfären jämfört med en opåverkad jämviktsnivå (som skulle kunna jämföras med den förindustriella situationen).

Till ditt förfogande har du ett impulssvar för hur den atmosfäriska mängden CO<sub>2</sub> påverkas av en utsläppsimpuls givet att inget fossil kol har släppts ut tidigare. Anta att impulssvaren består av en summation av exponentialfunktioner med olika relaxationstider ( $\tau_i$ )

$$f(t) = \sum_i A_i e^{-t/\tau_i}$$

$i$	$A_i$	$\tau_i$ [år]
1	0,1130	2,0
2	0,2130	12,2
3	0,2580	50,4
4	0,2730	243,3
5	0,1430	$\infty^1$

Var tydlig med att ange övriga eventuella antaganden.

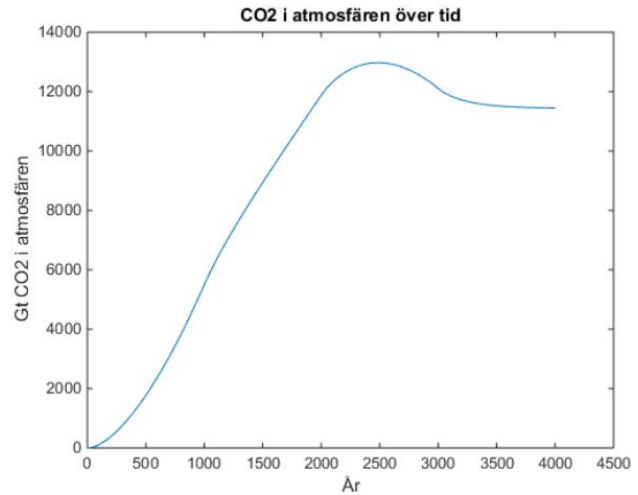
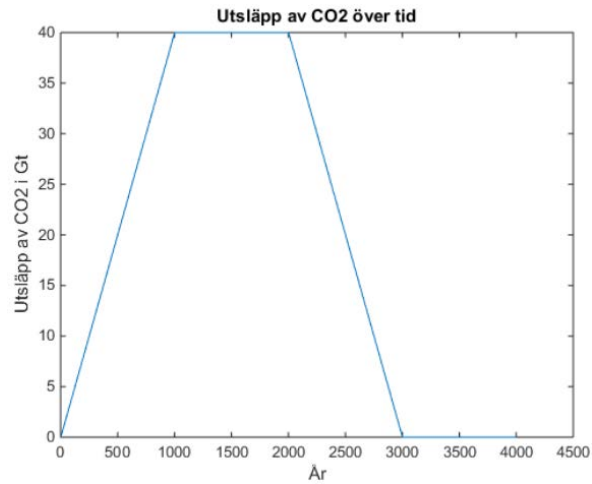
Antag att utsläppen börjar på 0 Gt CO<sub>2</sub> per år vid år 0 och sedan växer med 0,04 GtCO<sub>2</sub> per år till år 1000. Under år 1001-2000 är utsläppen stabila på utsläppsnivån från år 1000. År 2001-3000 minskar sedan utsläppen med 0,04 GtCO<sub>2</sub> per år från nivån år 2000. Avslutningsvis upphör utsläppen helt och hållet år 3001, dvs 0 GtCO<sub>2</sub> släpps ut per år under perioden 3001-4000. Antag att alla utsläpp är enbart av fossilt kol.

Implementera modellen, konstruera scenariot, simulera, illustrera och reflektera över hur mängden CO<sub>2</sub> i atmosfären förändras över de 4000 åren. **(3p)**

Implementera modellen, konstruera scenariot, simulera, illustrera och reflektera över hur mängden CO<sub>2</sub> i atmosfären förändras över de 4000 åren. **(3p)**

---

<sup>1</sup> Tips: Oändligheten ska ni kunna mata in som INF, annars kan du approximera det med ett väldigt stort tal.



Teckna faltningintegralen och beskrivit tillvägagångssättet för att lösa uppgiften (falta utsläpp och impulssvar osv) alternativt ha löst uppgiften korrekt **1p**

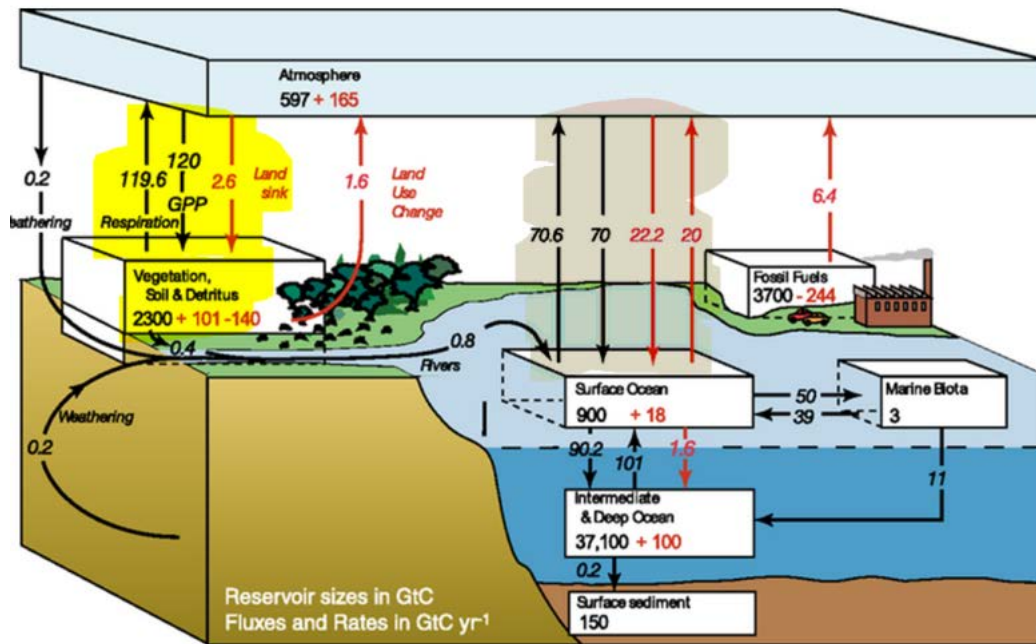
Implementera modellen, konstruera scenariot, simulera, illustrera utan reflektion med ev. nån annan miss **1p**

Reflektion och i övrigt korrekt **1p**

### b) Konstruktion av konceptuell kolcykelmodell

Konstruera och illustrera en konceptuell modell av den riktiga kolcykeln som ger oss bättre förståelse för vad som skulle hända med koldioxidutsläppen.

Möjliggör i illustrationen så att vi kan följa hur mängden kol i olika komponenter av kolcykeln samt flödena mellan de olika komponenterna skulle utvecklas över tid vid olika utsläpp av fossilt kol till atmosfären. (Tips: Ta en hel sida åt frågorna 3b och 3c samt lämna utrymme så att du får plats med svaret i fråga 3c när du besvarar 3b) (2p)



En förenklad version av den konceptuella modellen från kurskompendiet (på bilden ovan).

Den konceptuella modellen innehåller Utsläppskälla och atmosfär (0,5p), hav (0,5p), biosfär (0,5p) och korrekta riktningar på flöden mellan dessa som visar att det är en balans mellan de olika delarna (förutom direkt mellan biosfär och hav) (0,5p)

### c) Användning av konceptuell modell

Använda samma utsläppscenario som i fråga 3a). Markera på ett lämpligt sätt i den konceptuella modellen från fråga 3b) vad som förväntas hända med mängderna kol i de olika komponenterna och flödena mellan dem vid följande tidpunkter: år 0, år 500, år 1500, år 2500 och år 10000. Dessa tidpunkter är före och mitt under utsläppens tre första faser samt långt efter att utsläppen försvunnit = blivit 0 Gt CO<sub>2</sub> per år. (2p)

År 0 & år 10000 -. För att man visar att balans råder (flödena är 0 resp. nära 0) före utsläppen och att en ny förhöjd balans (med mer i alla delar) har infunnits år 10000. 0,5p

År 500, samtliga komponenter ökar, och de ökar långsammare (ivf alla utom ev biosfären som kan vara begränsad i hur mycket den tar upp) än år 1500, 0,5p



År 1500, samtliga komponenter ökar, och de ökar snabbare (ivf alla utom ev biosfären som kan vara begränsad i hur mycket den tar upp) än år 500, **0,5p**

År 2500, atmosfären och havet ökar och biosfären står i princip stilla, atmosfären ökar långsammare än år 1500 men snabbare än år 500 (eftersom havet är mer mättat) (att biosfären i princip står stilla är inte nödvändigt att uppge om resten av lösningen är fläckfri, men om man har någon liten annan miss så kan kunskapen om biosfärens utveckling över tid för ett sånt här scenario kompensera för det) **0,5p**

**d) Atmosfärisk koldioxid och temperaturförändring**

Med hjälp av din konceptuella modell och ditt svar i fråga 3c), visa med en kvalitativ graf ungefärligt hur mängden koldioxid i atmosfären förändras under detta 4000 åriga utsläppsscenario (beskrivet i fråga 3a). Med en kvalitativ graf menas här att inga exakta siffror förväntas utan fokus är på riktningar och relativa förändringshastigheter under de olika "årtusendena". Med en motsvarande kvalitativ graf visa sen grovt vilken temperaturförändring detta utsläppsscenario skulle ge upphov till. (3p)

Lägg in graferna som din modell genererar och kommentera de olika delarna

**1 p** för koldioxid **0,5p** för ökande och sen ännu snabbare ökande 0-1000, 1000-2000. **0,5p** för fortsatt ökande år 2000-3000 och sen avtagande ökning och till slut i princip stabilt år 4000.

2p för temperatur

**1p** för exponentiellt ökande år 0-1000 (**0,5p**) och sen linjärt ökande år 1000-2000 (**0,5p**).

**1p** för fortsatt ökande (**0,5p**) år 2000-3000 och sen (**0,5p**) för i princip stabil temperatur, på en nivå som är i princip i höjd med den högsta temperatur som uppnås, efter ett tag närmare år 4000.

Förståelse för att minskning av CO<sub>2</sub> utsläpp kan antas leda till minskade utsläpp av kylande aerosoler (även om vi inte har skrivit nånting om effekten av andra ämnen här) kan kompensera för någon annan miss med 0,5p –men det kräver att man inser att även detta skulle isf komma gradvis i takt med CO<sub>2</sub> utsläppsminskningar och därför inte leder till någon drastisk förändring i temperaturen..

## Uppgift 4

Student 1:

a)

Vi sätter upp matrisen,  $p$ , som en  $2 \times 2$ -matris. När länderna A och B bidrar så får båda länderna,  $p_{1,1} = N - K/2$  nytta.  $N$ -termen från nyttan av inkomsten när sjön är ren igen och den negativa  $K/2$ -termen då kostnaden fördelas på de två länderna.

På samma sätt får båda länderna nyttan  $p_{2,2} = 0$  då varken av länderna bidrar till arbetet att göra sjön ren.

$p_{1,2} = N$ , sätter vi till nyttan då landet som använder strategin åker på snålskjuts. Då bidrar man inte till arbetet, men får ändå nyttan.

$p_{2,1} = N - K$ , är då nyttan då landet som använder strategin är det enda landet som bidrar till arbetet. Det kostar mer, men man får ändå nyttan  $N$  av att sjön blir ren.

$$p = \begin{pmatrix} N - K/2 & N \\ N - K & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Vi antar först att  $N > 0$  och  $K > 0$ .

i)

Om  $N > K$ , och vi antar att vi är landet/spelare A WLOG.

Då om spelare B bidrar, så vill vi inte bidra. För att  $N > N - K/2$ .

Om spelare B inte bidrar, så vill vi bidra. För att  $N - K > 0$ .

Nashjämvikten blir således diagonalen,  $p_{1,2}, p_{2,1}$ .

D.v.s. att ett land bidrar och att ett land åker på snålskjuts.

ii)

Om  $K > N$ , och vi antar att vi är landet/spelare A WLOG.

Då om spelare B bidrar, så vill vi inte bidra. För att  $N > N - K/2$ .

Om spelare B inte bidrar, så vill inte bidra. För att  $N - K < 0$  då att  $K > N$

Nashjämvikten blir således  $p_{2,2} = 0$ . Om båda länderna samarbetat så hade nyttan blivit större än 0 om  $N - \frac{K}{2} > 0$ , men det som är bäst för det enskilda landet ger Nashjämvikten, 0 vilket är mindre än  $N - \frac{K}{2}$  om  $N > \frac{K}{2}$ . Detta är ett exempel på det kollektiva handlandets problem. Då båda länderna hade tjänat på att samarbeta, men det är alltid bättre att inte samarbeta för varje land oavsett vad det andra landet gör.

## Uppgift 5:

### Bedömningsanvisning:

*a) För dynamiken med fiskare, beräkna fixpunkter och avkastningen analytiskt. Välj sedan en fixpunkt och kontrollera om den fixpunkten är stabil. (3p)*

\*beräkna fixpunkter och avkastningen analytiskt. **2p**

\*kontrollera om en giltig fixpunkt är stabil **1p** (kan få 0,5 p om man korrekt beskriver vad man ska göra för att avgöra stabiliteten för en fixpunkt men inte lyckas)

*b) Beräkna den maximala bärkraftiga avkastningen med avseende på  $r$  för optimalt  $n$  då populationen är nollskild och visualisera (plotta) på lämpligt sätt. (2p)*

\*Uppvisat Förståelse för vad maximala bärkraftiga avkastningen (MSY) är **0,5p**

\*Beräknat MSY för åtminstone ett  $r$  och ett  $n$  **0,5p**

\*Varierat  $r$  för optimal  $n$  och visualiserat detta **1p**

$$5 \quad a) \quad X_{t+1} = r X_t (1 - X_t) - nq X_t$$

fixpunkt för då  $X_{t+1} = X_t$

$\Rightarrow$

$$X_{fix} = r X_{fix} (1 - X_{fix}) - nq X_{fix} = r X_{fix} - r X_{fix}^2 - nq X_{fix}$$

$\Leftrightarrow$

$$r X_{fix}^2 + (1 - r + nq) X_{fix} = 0$$

$$X_{fix} (r X_{fix} + 1 - r + nq) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{fix,1} = 0 \\ r X_{fix,2} = r - 1 - nq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{fix,1} = 0 \\ X_{fix,2} = \frac{r - 1 - nq}{r} \end{cases}$$

ann.  $r - 1 - nq > 0 \Leftrightarrow r > 1 + nq$   
 $0 < X_0 < \frac{r - nq}{r}$

$$\text{Avkastningen} = n \cdot q \left( \frac{r - 1 - nq}{r} \right)$$

För fixpunkten

$$X_{fix} = \frac{r - 1 - nq}{r}$$

där  $r = 5$ ,  $n = 10$ ,  $q = 0.3$  med

$$0 < X_0 < \frac{r - nq}{r}$$

har vi från figure 1 att plot är stabil

5 b) avkastningen  $z = nq \left( \frac{r-1-nq}{r} \right)$

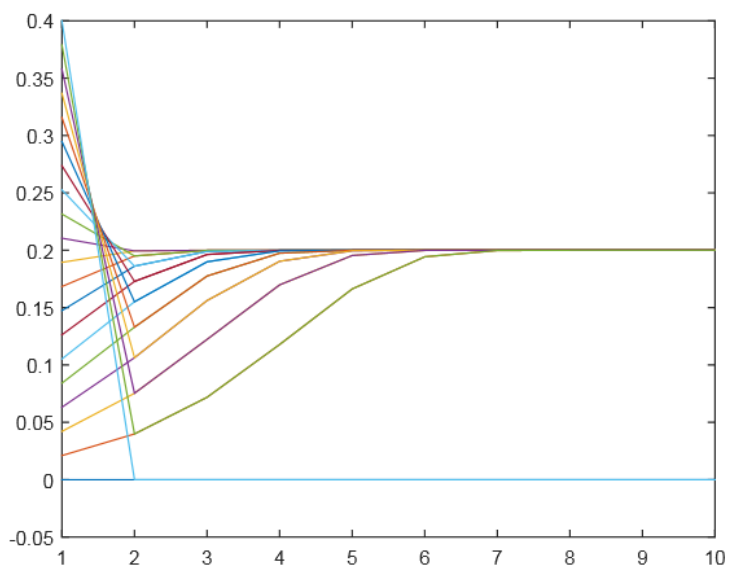
vi vill beräkna avkastningen i avseende på  $r$  för optimal av  $n$ .

$$\max_n nq \left( \frac{r-1-nq}{r} \right)$$

för olika  $r$

se figur 9.

i plotten markeras det optimala valet av  $n$ , för ett givet  $r$ , med \*



Stabilitetsanalys

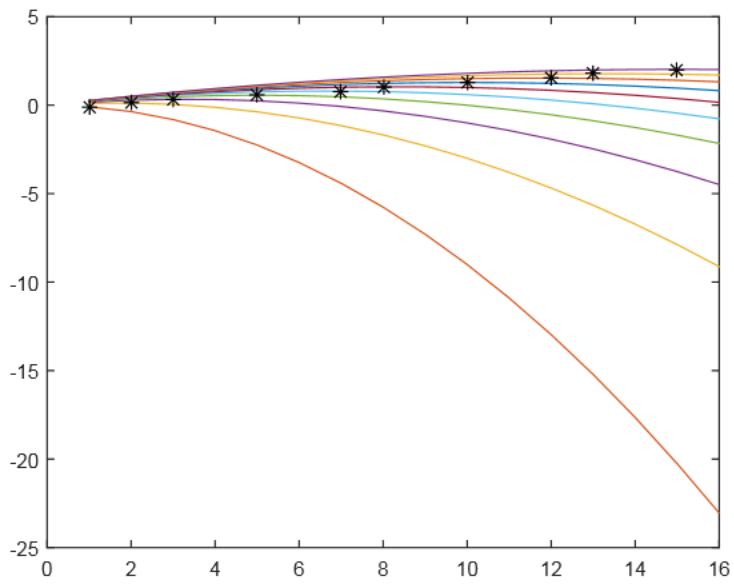


Fig: Optimal n för givet r