Tentamen: Miljö och Matematisk Modellering (MVE345) för TM Åk 3, VÖ13 klockan 14.00 den 27:e augusti.

För uppgifter som kräver en numerisk lösning så skriv ned ditt svar och hur ni gick till väga för att lösa uppgiften (helst inte programkod), lägg till eventuella grafer eller illustrationer och spara svaren som separata pdf-filer i mapparna C:__EXAM__\Assignments\Uppgift1, C:__EXAM__\Assignments\Uppgift2, osv. För uppgifter som endast kräver analytiska lösningar eller ett resonerade svar kan ni välja att skriva dessa på datorn eller för hand. Skriv ner namnet på den dator ni använder på mappen som ni lämnar in till tentamensvakten.

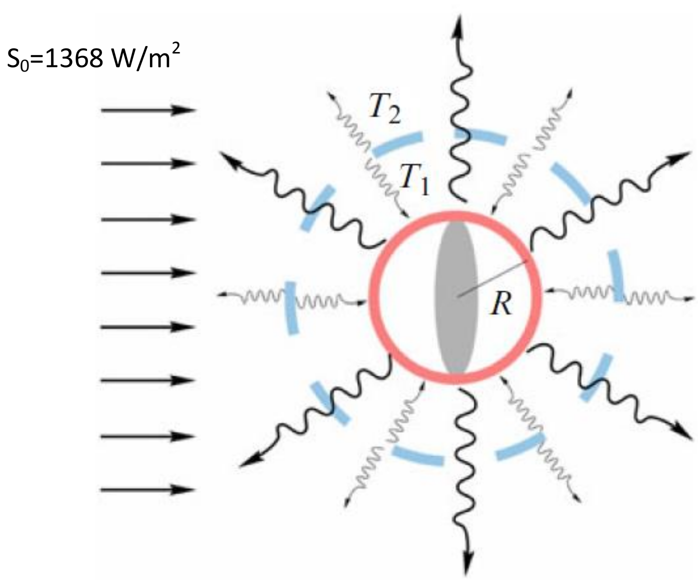
Betygsgränser: 12 p för 3:a, 16p för 4:a, 20p för 5:a.

Lärarkontakt under tentamen: Daniel Johansson, Tel: 0734394619.

---

1. Beskriv de båda vetenskapligt centrala begreppen "modell" och "teori" och diskutera skillnaderna och förhållandet mellan dem. (**4p**)

2. Ställ upp ett uttryck för och beräkna jordens yttemperatur (T_1) samt atmosfärstemperatur (T_2) utifrån en enkel energibalansmodell som beaktar inkommande solstrålning, jordensyta och en homogen atmosfär. Använd Stefan Boltzmanns lag, där Stefan-Boltzmanns konstant $\sigma = 5.67 \cdot 10^{8}$ $Wm^{-2}K^{-4}$. Anta att jordytan är en svartkropp och atmosfären är transparant för kortvågig solstrålning, men att atmosfären beter sig som en grå kropp, med emissiviteten ε=0.8, för långvågig värmestrålning. Jordytan har en albedo α=0.3. R i figuren nedan representerar jordens radie. (**5p**)



3. De senaste åren har den allmänna förståelsen ökat för att det finns ett approximativt linjärt samband mellan kumulativa mänskliga CO_2 utsläpp och den långsiktiga temperaturökningen på jorden. Detta gäller åtminstone över den kommande tusenårsperioden. Sambandet brukar i vetenskapliga kretsar benämnas ”Transient Climate Respone to cumulative Emission” (TCRE). Du ska uppskatta detta approximativa linjära samband mellan kumulativa CO_2 utsläpp och dess påverkan på den långsiktiga globala medeltemperaturen.

Till ditt förfogande har du ett impulssvar för hur den atmosfäriska CO_2 koncentrationen påverkas av en utsläppsimpuls och ett impulssvar för hur den globala medeltemperaturen påverkas av en ”radiative forcing” impuls. Vi antar att 1 Gton CO_2 i atmosfären motsvarar 0.128 ppm CO_2 [$ppm \cdot Gt^{-1}$], och att varje ppm CO_2 i atmosfären leder till en radiative forcing på $1.3 \cdot 10^{-2}$ [$W \cdot m^2 \cdot ppm^{-1}$].

Anta ett impulssvar som består av en summation av exponentialfunktioner med olika relaxationstider (τ_i).

$$f(t) = A_0 + \sum_i A_i e^{-t/\tau_i}$$

i	CO_2		Temperatur	
	A_i[unitless]	$\tau_i[yr]$	$A_i[KW^{-1}m^2(yr)^{-1}]$	$\tau_i[yr]$
0	0.2173	-	0	-
1	0.2240	394.4	0.075	8.4
2	0.2824	36.54	0.0011	409.5
3	0.2763	4.304	0	0

Skriv ner din lösningsmetodik, illustrera sambandet mellan kumulativa CO_2 utsläpp och ökning av den globala medeltemperatur och uppskatta lutningen. (Det sista steget kan göras grovt, ni behöver inte använda minstakvadratmetoden eller något liknande). **(6p)**

4. Anta att vi har två isolerade populationer (kanske av samma fiskart). Varje population har en intern dynamik enligt den logistiska avbildningen

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x)$$

$$\dot{y} = \beta y(1 - y)$$

Vi antar vidare att en fiskare ”skördar” med konstant insats q i detta system, utan att kunna (eller bry sig om att) skilja på fisken i population x och y. De nya populationsdynamikerna blir då

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x) - qx$$

$$\dot{y} = \beta y(1 - y) - qy$$

Vad blir maximal årlig avkastning, $q(x+y)$, i det stationära tillståndet? Diskutera hur resultatet beror av α/β. Kommentera den biologiska relevansen av ditt resultat. **(6p)**

5. Den vanliga diffusionsekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

har fundamentallösningen

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

a). Hur ser lösningen till diffusionsekvationen ut för initialvillkoret $f(0, x) = g(x)$ på det öppna intervallet ($x \in]-\infty, \infty[$) ? (Lösningen är formell och ges lämpligen på integralform.) (**1p**)

Vi tänker oss nu en variant av diffusionsekvationen där också sönderfall förekommer med en viss hastighet α. Ekvationen blir då

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha f$$

b). Vad är fundamentallösningen till diffusionsekvationen med sönderfall? (**1p**)

c). Hur ser lösningen till diffusionsekvationen med sönderfall ut för initialvillkoret $f(0, x) = g(x)$ på det öppna intervallet ($x \in]-\infty, \infty[$) ? (Lösningen är formell och ges lämpligen på integralform.) (**1p**)

Lycka till!

Uppgift 1. Se sidor 37-47 i Gerlee & Lundh ”Vetenskapliga Modeller”

Uppgift 2. Se sidor 27-29 i Goosse m fl ” Introduction to climate dynamics and climate modelling”

Uppgift 3.

Använd faltning för att beräkna den förhöjda CO_2 koncentrationen, *D(t),* till följd av en utsläppsbana $E(t)$ och med impulsresponsfunktionen $f(t)$

$$D(t) = \alpha \cdot \int_0^t E(\bar{t}) \cdot f(t - \bar{t}) d\bar{t}$$

där α= 0.128. Faltningsekvation kan eventuellt diskretiseras (t.ex. med $\Delta\bar{t} = 1$)

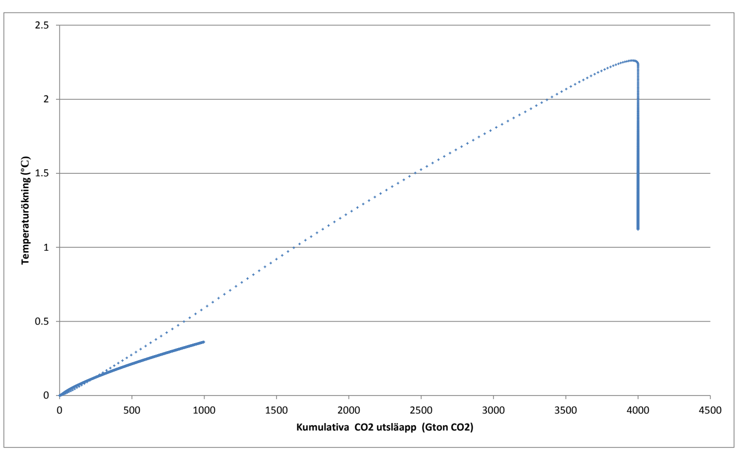
$$D(t) = \alpha \cdot \sum_{\bar{t}=0}^{t} E(\bar{t}) \cdot f(t - \bar{t})$$

Använd faltning för att beräkna ökningen i temperatur, $T(t)$, till följd av den ökade koncentrationen och med impulsresponsfunktionen $g(t)$

$$T(t) = \beta \cdot \int_0^t D(\bar{t}) \cdot g(t - \bar{t}) d\bar{t}$$

därβ= $1.3 \cdot 10^{-2}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot ppm^{-1}$]. Faltningsekvation kan eventuellt diskretiseras (t.ex. med $\Delta\bar{t} = 1$)

$$T(t) = \beta \cdot \sum_{\bar{t}=0}^{t} D(\bar{t}) \cdot g(t - \bar{t})$$



Figur 1. Relationen mellan kumulativa CO2 utsläpp och temperaturökning för två olika utsläppsscenarior. Grovt räknat får vi 0.4°C per 1000 Gton CO_2, men osäkerheten är stor beroende på scenario och tidpunkt då man beräknar temperaturen.

Maximal avkastning från flera isolerade populationer

Systemet har fyra möjliga fixpunkter:

$$\begin{aligned}
(x,y) &= (0,0)\\
(x,y) &= (0,(\beta-q)/\beta)\\
(x,y) &= ((\alpha-q)/\alpha,0)\\
(x,y) &= ((\alpha-q)/\alpha,(\beta-q)/\beta)
\end{aligned}$$

Den nollskiljda fixpunkten är stabil om q är mindre än α respektive β. Avkastningen i de olika fixpunkterna blir:

$$\left(0, \frac{q(\beta-q)}{\beta}, \frac{q(\alpha-q)}{\alpha}, q\left(2-\frac{q(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right)\right)$$

Bästa avkastning fås i de olika fixpunkterna när

$$\left(q=?, q=\frac{\beta}{2}, q=\frac{\alpha}{2}, q=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

Vilket ger avkastning

$$\left(0, \frac{\beta}{4}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

Det kommer att vara optimalt att låta $q=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ så länge $\frac{1}{3}<\frac{\alpha}{\beta}<3$, i annat fall kommer det att vara ”bättre” att låta en av populationerna dö ut.

Slutsatsen blir att om olika subpopulationer har olika reproduktionsgrad kan maximering av avkastning leda till att de svagare populationerna helt fiskas ut.

Diffusion med sönderfall

Den formella lösningen ges av faltning:

$$f(t,x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y)$$

Fundamentallösningen för diffusionsekvationen med sönderfall är (kan hittas t.ex. via ansats av lösning på formen $h_1(t)h_2(t,x)$)

$$f(t,x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} - \alpha t\right)$$

Den formella lösningen för initialvillkåret $f(0,x) = g(x)$ ges även i detta fallet av en faltning av fundamentallösningen

$$f(t,x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\alpha t\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y)$$