Tentamen: Miljö och Matematisk Modellering (MVE345) för TM Åk 3, VÖ13 klockan 14.00 den 2:e juni.

Skriv ned dina svar och lösningar (ej programkod), lägg till eventuella grafer eller illustrationer och spara svaren som separata pdf-filer i mapparna C:__EXAM__\Assignments\Uppgift1, C:__EXAM__\Assignments\Uppgift2, osv.

Betygsgränser: 12 p för 3:a, 16p för 4:a, 20p för 5:a.

Lärarkontakt under tentamen: Erik Sterner, Tel: 031 - 772 31 01.

---

1. Ni ska analysera maximalt bärkraftigt utnyttjande i den logistiska avbildingen med flera fiskare. Anta att vi har en populationsdynamik där nya individer introduceras vid diskreta tidpunkter och att det finns lite överlapp mellan generationerna. Populationsdynamiken antar vi ges av den diskreta logistiska avbildningen med tillväxtfaktor 2

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi antar vidare att ett antal fiskare ”skördar” med konstanta insatser q_i i detta systemet. Den nya populationsdynamiken blir då

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t) \; - \sum_i q_i x_t$$

   a. Om vi antar att fiskarna kan komma överens, vad är det maximala bärkraftiga utnyttjandet i systemet? (3p)
   b. Givet att alla q_i är lika och att det totala upptaget av fisk är det maximalt bärkraftiga utnyttjandet är det då (kortsiktigt) lönsamt för en enskild fiskare att överge överenskommelsen och öka eller minska sin kvot, givet konstant pris per enhet fisk? Visa och kommentera ditt svar. (3p)

2. Koldioxidutsläppen från en Peugeot 308 SportWagon 1,2 PureTech 130 är 109 gram koldioxid per kilometer. Du ska beräkna den totala klimateffekten av att använda bilen över en period på 15 år. Antag att bilen körs 1500 mil per år.

Till ditt förfogande har du ett impulssvar för hur den atmosfäriska CO_2 koncentrationen påverkas av en utsläppsimpuls och energibalansmodell där påverkan på den globala medeltemperaturen kan beräknas. Du vet även att 1 Gton CO_2 i atmosfären motsvarar 0.128 ppm CO_2, och vi antar att varje ppm CO_2 i atmosfären leder till en radiative forcing på $1.3 \cdot 10^{-2}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot ppm^{-1}$].

Impulssvaret består av en summation av exponentialfunktioner med olika relaxationstider (τ_i)

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-t/\tau_i}$$

Tabell 1. Konstanter och relaxationstider för impulssvaret.

i	CO_2	
	A_i[unitless]	τ_i[yr]
0	0.217	NA
1	0.186	1.186
2	0.338	18.51
3	0.259	172.9

Jordens energibalans beskrivs med följande modell:

$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = F - \frac{T_1}{\lambda} - \kappa(T_1 - T_2)$$

$$C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \kappa(T_1 - T_2)$$

där F är radiative forcing [$W \cdot m^{-2}$], T_1 är ökningen av medeltemperaturen [K] jämfört med den förindustriella nivån i en välblandad box som representerar ythaven, atmosfären och landområden, T_2 är ökningen av medeltemperaturen [K] (jämfört med den förindustriella nivån) i en välblandad box som representerar djuphaven. C_1 och C_2 är värmekapaciteten [$W \cdot yr \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$] för yt-boxen respektive djuphavsboxen. κ är värmeledningskoefficienten[$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$], samt λ som är klimatkänslighetsparametern [$K \cdot W^{-1} \cdot m^2$].

Använd följande parametervärden:
C_1=10 [$W \cdot yr \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$]
C_2=180 [$W \cdot yr \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$]
λ=0.9 [$K \cdot W^{-1} \cdot m^2$]
κ=1.1 [$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$].

Implementera och eventuellt diskretisera modellen på valfritt vis och svara på följande frågor:

a. Beräkna och illustrera påverkan på CO_2 koncentrationen från det år bilen tas i bruk och 200 år framåt. Bilen har en livslängd på 15 år. (3p)
b. Beräkna och illustrera påverkan på den globala medeltemperaturen (T_1) från det år bilen tas i bruk och 200 år framåt. Bilen har en livslängd på 15 år. (3p)

3. Klimatkänsligheten är ett av de mest centrala begreppen inom klimatvetenskapen.
   a. För värdet på klimatkänsligheten så är återkopplingar inom klimatsystemet avgörande. Nämn tre av de återkopplingar som är viktiga för värdet på klimatkänsligheten. (2p)
   b. På vilket sätt är klimatkänsligheten avgörande för utsläppen av koldioxid under detta århundrade givet att vi ska klara att hålla ökningen av den globala medeltemperaturen under 2ºC över den förindustriella nivån? (1p)

4. ”Hållbar utveckling” sägs ofta ha tre dimensioner; vilka är dessa tre dimensioner? Förklara även kortfattat vad var och en av de tre dimensionerna innebär? (3p)

5. I den här uppgiften ska vi titta på egenskaper hos diffusion. Diffusion kan som bekant beskrivas antingen som en slumpvandring av enskiljda ”partiklar” eller genom diffusionsekvationen som modellerar hur densiteten av partiklar eller sannolikhetsfördelningen av en partikel utvecklar sig i tiden (i detta fall i en dimension):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

   a. En av de viktigaste egenskaperna hos diffusion är att medelvärdet av kvadraten på förflyttningen från en startpunkt skalar linjär med tiden. Visa teoretiskt att det är så (använd antingen fundamentallösningen till diffusionsekvationen eller argument från slumpvandringen). (3p)
   b. Verifiera resultatet i uppgift a med hjälp av en simulering av en slumpvandring. (3p)

Lycka till!

Uppgift 1a.
Populationsdynamiken bestäms av:

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t) \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Populationsdynamik med upptag av fisk är:

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t) \ - \sum_i q_i x_t$$

Ansätt

$$y_t = \sum_i q_i x_t$$

=>

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t) \ - y_t$$

MSY=> $x_{t+1} = x_t$ =>

$$y_t = 2x_t(1 - x_t) \ - x_t = x - 2x_t^2$$

Det maximala bärkraftiga utnyttjandet är då

$$\frac{dy_t}{dx_t} = 1 - 4x_t \ = 0$$

$$x_t \ = \frac{1}{4}$$

$$y_t = \frac{1}{8}$$

Om alla q_i lika och att vi har *N* stycken fiskare får vi

$$q_i = \frac{1}{2N}$$

Uppgift b: Alternativ lösning till uppgift **b**. Om vi inställlet antar att alla fiskare succesivt ökar sina uttag så länge detta är egoistiskt lönsamt för dem får vi följande lösning.

$$x_{fix} = \frac{1 - \sum_i q_i}{2}$$

Maximering

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(q_j \frac{1 - \sum_i q_i}{2}\right)\Bigg|_{q_i = q \ \ \forall i} \\ q_i &= q = \frac{1}{1+N} \end{aligned}$$

där N är antalet fiskare.
Reflexioner. Insatsen för fiskarna är i detta fallet större än vid MSY, $\frac{1}{1+N} > \frac{1}{2N}$. Upptaget av fisk blir dock

$$q_i \cdot x_{fix} = \frac{1}{1+N} \cdot \frac{1 - \sum_i q_i}{2} = \frac{1}{2(1+N)^2} \tag{1}$$

vilket är mindre än upptaget vid MSY, $\frac{1}{8N}$. Fenomenet att alla aktörer ökar sina uttag trots att slutresultatet blir dåligt för samtliga kallas ibland för ”tragedy of the commons”.

Uppgift 1b.

Det finns flera möjliga lösningar till problemet. Vi ger ytterligare ett exempel här.

Sök stationär lösning och utryck x_t som funktion av q_j

$$x_t = 2x_t(1-x_t) \ -\sum_{i\neq j} q_i x_t - q_j x_t$$

$$1 = 2(1-x_t) \ -\sum_{i\neq j} q_i - q_j$$

$$\frac{1}{2} = 1 - x_t \ -\sum_{i\neq j} \frac{q_i}{2} - \frac{q_j}{2}$$

$$x_t = \frac{1}{2} \ -\sum_{i\neq j} \frac{q_i}{2} - \frac{q_j}{2}$$

En enskild fiskare *j* maximerar

$$q_j x_t = q_j \left(\frac{1}{2} \ -\sum_{i\neq j} \frac{q_i}{2} - \frac{q_j}{2} \right)$$

Derivera med avseende på q_j för att finna ”optimalt” uttag.

$$\frac{1}{2} \ -\sum_{i\neq j} \frac{q_i}{2} - q_j = 0$$

Vilket ger

$$q_j = \frac{1}{2} \ -\sum_{i\neq j} \frac{q_i}{2}$$

Där (vi antar att övriga fiskare håller fast vid sin insats från ”maximum sustainable yield” lösningen), dvs

$$q_i = \frac{1}{2N}$$

för alla $i \neq j$. Vilket ger

$$q_j = \frac{1}{2} \ - \frac{N-1}{4N} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

Dvs en enskild fiskare har ett incitament att frångå samarbetslösningen och öka sin insats.

Uppgift 2

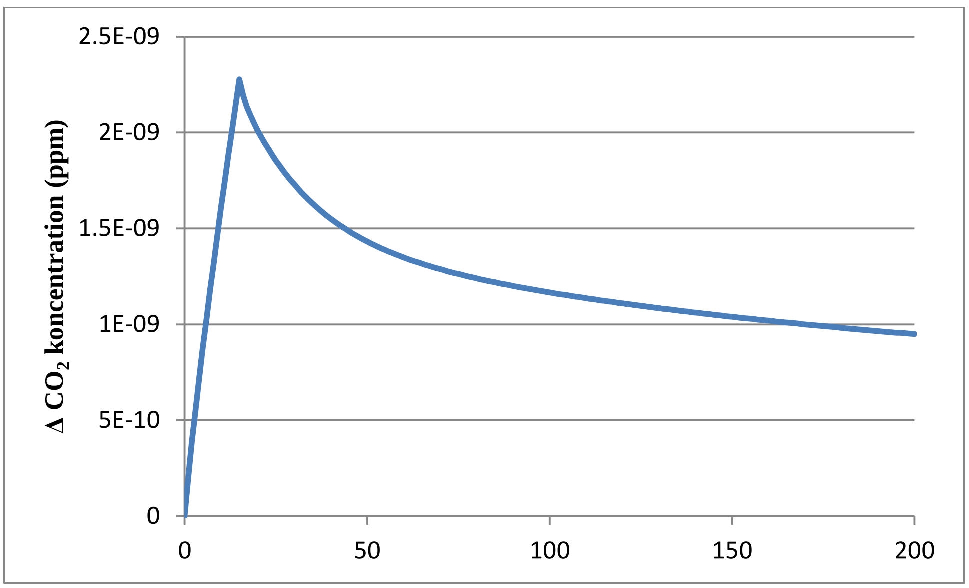
a.

Använd faltning för att beräkna den förhöjda CO_2 koncentrationen, *D(t)*, som bilen bidrar till, dvs

$$D(t) = \alpha \cdot \int_0^t E(\bar{t}) \cdot f(t - \bar{t}) d\bar{t}$$

där α= 0.128. Faltningsekvation kan eventuellt diskretiseras (t.ex. med $\Delta\bar{t} = 1$)

$$D(t) = \alpha \cdot \sum_{\bar{t}=0}^{t} E(\bar{t}) \cdot f(t - \bar{t})$$



Figur. Bilens påverkan CO2 koncentrationen

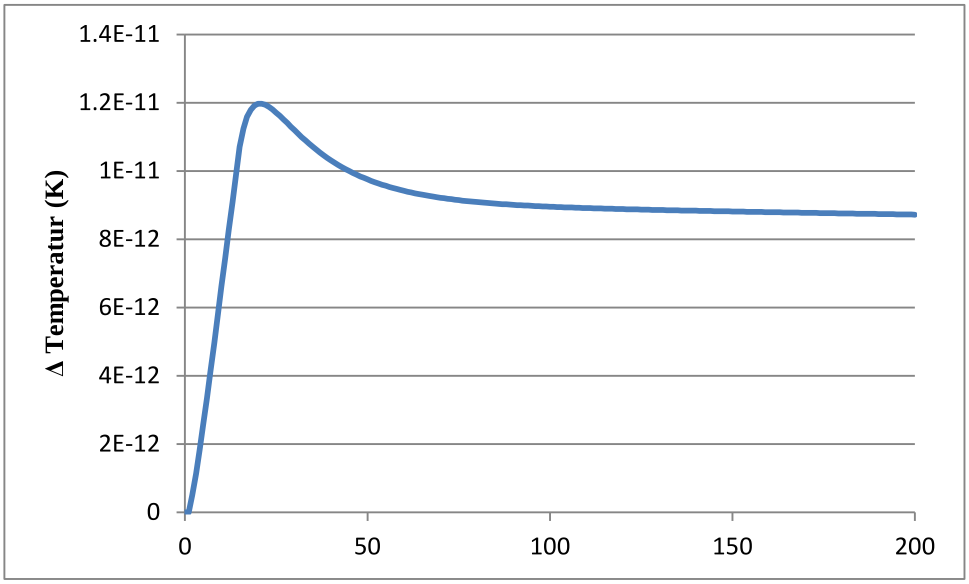
b.

Diskterisera energibalansmodellen (tex tidssteg 1 år, Euler framåt)

$$T_1(t+1) = T_1(t) + \frac{F(t)}{C_1} - \frac{T_1(t)}{\lambda \cdot C_1} - \frac{\kappa}{C_1} \cdot \big(T_1(t) - T_2(t)\big)$$

$$T_2(t+1) = T_2(t) + \frac{\kappa}{C_2} \cdot (T_1 - T_2)$$

där $F(t)$=$\beta \cdot D(t)$ och där β=1.3·10^{-2} [$W \cdot m^{-2} \cdot ppm^{-1}$].



Figur. Bilens påverkan på den globala medeltemperaturen.

3a.) Se föreläsning Klimatmodeller, klimatkänsligheten, och klimatdynamik den 5/5-2014 av Daniel Johansson samt Goosse m.fl. sektion 4.1.3 och 4.2 och Azar kapitel 4.

b.) Se föreläsning Klimatmål, policy och åtgärder den 9/5 av Daniel Johansson samt Azar kapitel 4.

4. Se föreläsning av Emma Jonson 27/3

Diffusion

Fundamentallösningen till diffusionsekvationen är:

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

(Om man inte kommer ihåg hur fundamentallösningen ser ut i detalj kan man ta fram den genom att ansätta en lösning på formen $t^\alpha \exp(-t^\beta x^2)$ och anpassa lösningen till att satisfiera ekvationen, eller naturligtvis använda sannolikhetsargumentet nedan.) Den förväntade kvadratiska förflyttningen blir då:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = 2t$$

Den alernativa lösningen gör man genom att titta på hur väntvärdet av x^2 utveckas i tiden. Chansen att i ett tidsteg hoppa till höger respektive vänster är 0.5. Man får då:

$$\langle x_{t+1}^2 \rangle = \langle 0.5(x_t+1)^2 + 0.5(x_t-1)^2 \rangle = \langle x_t^2 + 1 \rangle = \langle x_t^2 \rangle + 1$$

vilket visar att $\langle x_{t+1}^2 \rangle$ ökar linjärt med tiden.

5b.

Metakod

```
vektorn trajSumSq fylls med tEnd nollor
For (ett antal realisationer av slumpvandringar) ->
        vektorn traj fylls med tEnd nollor
        x=0;
        For (t=2 till t=tEnd ) ->
                traj[ t ] = traj[ t-1 ] + (+1 eller -1 med sannolikhet 0.5)
        end
        trajSumSq += traj ^2 //kvadraten verkar elementvis end
```

plotta trajSumSq och se att det blir en rät linje