Exempeltentamen i Miljö och Matematisk Modellering för TM Åk 3, MVE345

1. Låt E stå för energi, Q värme och W arbete. Vi kan anta att vi har en ideal gas, dvs att $pV = RT$, samt att differentialen för arbetet kan beskrivas som $dW = -p\,dV$. Utgå från följande differentialsamband $dE = dQ + dW$.

   (a) Visa att differentialen dQ inte är exakt och beskriv vad detta innebär.

   (b) Kan vi justera Q för att skapa en ny variabel som verkligen är exakt? (Där justera ska läsas som multiplicera med lämlig integrerande faktor.)

   (5 p)

2. Studera den givna tidsserien S_t, given i filen `St.txt`, som kommer från att mäta nivån av Svaveldioxid vid en särskild miljöövervakningsstation. Gör en förutsägelse för nivån för $t = 100 \ldots 200$ och plotta detta i ett diagram. Redogör noga för ditt tillvägagångssätt och motiven att du valde just detta sätt.

   $S_t =$ 100.518, 100.585, 101.052, 102.045, 101.808, 102.461, 101.969, 101.585, 102.328, 101.999, 100.954, 100.492, 100.099, 99.5791, 99.5083, 98.8244, 98.465, 97.4038, 97.6034, 97.4252, 97.1531, 97.2843, 97.5299, 98.0337, 98.1113, 99.4135, 99.1571, 99.9334, 100.769, 100.842, 100.812, 100.632, 101.324, 100.498, 100.268, 99.823, 99.8445, 99.1436, 98.3445, 98.1577, 97.1719, 96.5294, 97.1308, 96.2067, 96.6287, 95.9025, 96.139, 96.5915, 96.8474, 97.6108, 97.8214, 98.5602, 98.3669, 98.9982, 99.2724, 99.0919, 99.1741, 99.6112, 99.3121, 99.2127, 98.4556, 98.6983, 97.8699, 97.0627, 96.3537, 95.9333, 95.6603, 95.4612, 95.4196, 95.3786, 95.1792, 95.43, 95.3516, 95.3558, 95.9958, 96.3773, 96.5539, 97.1951, 97.805, 98.4677, 98.4411, 98.1007, 98.5741, 98.3813, 98.3422, 97.4258, 97.178, 96.9126, 96.5846, 95.5497, 95.0814, 94.9574, 94.3243, 93.7239, 93.913, 93.5442, 93.454, 94.429, 94.6084, 94.7695.
   (5 p)

3. Beskriv Darcys lag samt ge en illustration genom att tillämpa lagen på en tänkt material (där du själv får bestämma materialegenskaperna) och plotta resultatet för olika tryckdifferenser.
   (5 p)

4. På Påskön som ligger väldigt isolerat från omvärlden fanns det när de första människorna flyttade dit en rik naturresurs i form av ett komplex av palmträd och fertil jord. Det finns arkeologiska fynd som visar på att utvecklingen av den mänskliga populationen och jord-palmträdskomplexet följde en slags ”Lotka-Volterra predator-prey” modell. Simulera en modifierad logistisk tillväxt av naturresursen N (ekvation utelämnad) och den kopplade populationsutvecklingen på Påskön (dP/dt nedan) med hjälp av följande två ekvationer och den fullständiga listan över variabler och parametrar nedan. Visa grafer över utvecklingen av P och N i samma graf för samtliga deluppgifter. Välj en tidshorisont som passar för de fenomen du vill illustrera och gör även rimliga antaganden om den initiala mängden ”naturresurs” och antalet upptäckare (dvs P_0).
   a) Går utvecklingen mot något stabilt läge?
   b) Hitta ytterligare två olika uppsättningar parametervärden som skapar fundamentalt andra typer av lösningar. Beskriv vad figurerna visar.

$$\frac{dN}{dt} = ... \tag{1}$$

$$\frac{dP}{dt} = P(f_d + \phi\alpha N) \tag{2}$$

Benämning	**Värde**	**Förklaring**
N	1.5	Naturresurs (jord-palmträdskomplex)
P	0.2	Population (proportionell mot utnyttjande av naturresursen)
K	12000	Bärförmåga av naturresurs
α	$4 \cdot 10^{-5}$	Produktivitet i utnyttjandet av naturresursen
R	0.04	Reproduktionsparametern för naturresursen
f_d	-0.1	Födelse-död: populationsminskningen i frånvaro av naturresursen
ϕ	4	Tillväxtfaktor för populationen

(5 p)

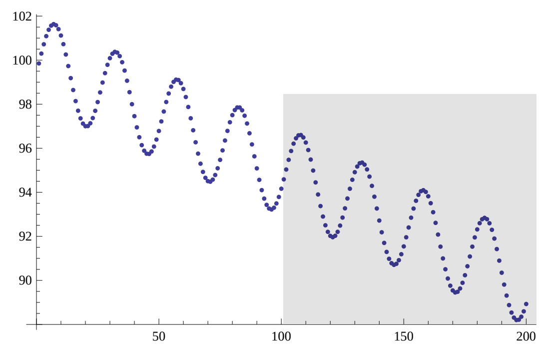
Betygsgränser: 3:a 9 p, 4:a 13 p och 5:a 16 p.

Exempeltentamen i Miljö och Matematisk Modellering för TM Åk 3, MVE345

1. Se sidorna 12 och 13 i M^3-kompendiet. Eller ännu hellre föreläsningsanteckningarna från den föreläsningen.

2. Det finns en hel uppsjö av möjligheter att hitta ett mönster i denna datamängd och optimera parametrar för att komma fram till något i denna stil:

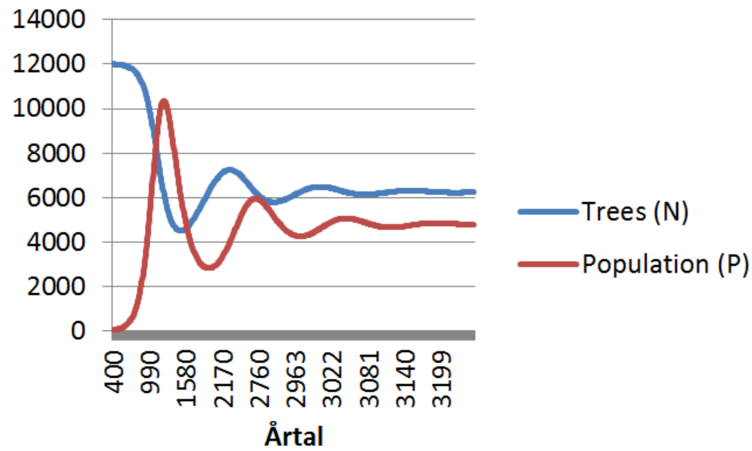
$$f(t) = 2\sin(0.25t - 0.3) - 0.05t + 100.$$



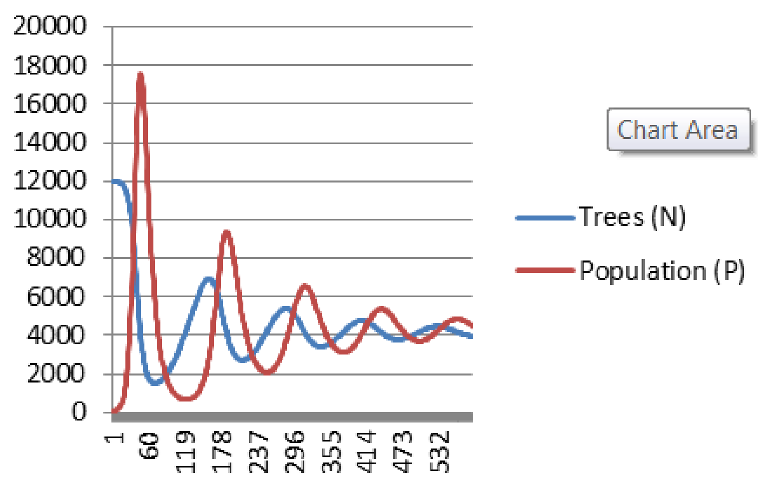
Figur 1: Modellens förutsägelse i den gråa rutan.

3. Se till exempel sektion 11.1 i M^3-kompendiet. Eller kanske ännu hellre din rapport till inlämningsuppgiften.

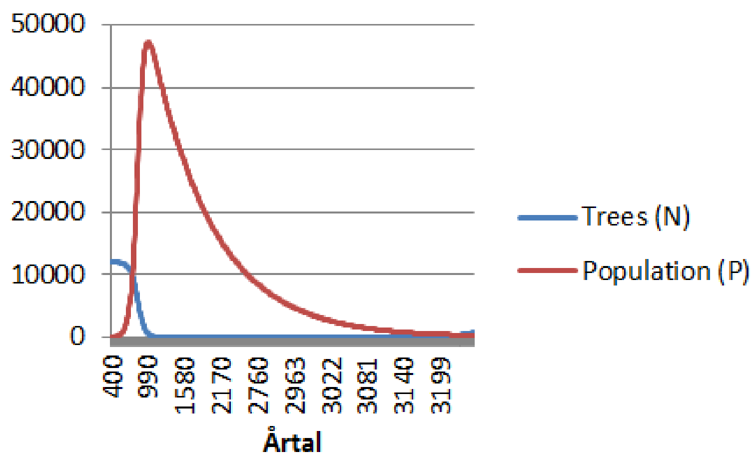
4. Antag $P_0 = 40$ och $N_0 = 12000$. Beräkna årliga värden på $N(t+\delta t) = N(t) + \frac{dN}{dt} \cdot \delta t$ (med $\frac{dN}{dt}$ enligt nedan) och på samma sätt $P(t+\delta t) = P(t) + \frac{dP}{dt} \cdot \delta t$ (med $\frac{dP}{dt}$ enligt uppgiftens formulering). Figur 4 nedan visar utvecklingen historiskt samt hur framtiden skulle kunna ha utvecklats om ön hade förblivit isolerad. De övriga två figurerna illustrerar två fundamentalt annorlunda scenarion som skapats med andra parametervärden (se figur texterna).



Figur 2: Denna figur visar utvecklingen av P och N för påskön enligt vad arkeologiska studier kompletterade med denna modell tyder på samt ett framtidsscenario som bygger på att ön hade fortsatt vara isolerad och att resursen hade användts på liknande vis.



Figur 3: Denna figur visar utvecklingen av P och N för påskön om α vore 50% större än i orginal modellen.



Figur 4: Denna figur visar utvecklingen av P och N för påskön om beroendet av resursen genom parametern f_d vore med 90% lägre.