Tentamen i Miljö och Matematisk Modellering MVE345 24 augusti 2011, 8.30-12.30

1. Sätt upp en modell av tillväxt av en bakterikultur som växer på en Agarplatta med rikligt med socker. Vid tiden 0 finns det 500 000 bakterier. Vi kan också anta att inflödet av sockerlösning och själva utrymmet ger en miljö som har bärighet av en population på 9 miljoner. (5 p)

2. Betrakta en slumpvandrare i intervallet [0,1] med följande randvillkor. Slumpvandraren föds i origo och om den träffar den högra randen vid $x = 1$ så dör den. Vidare så är den vänstra randen vid $x = 0$ reflekterande, dvs. om en slumpvandrare står i $x = 0$ kan den bara gå till höger. Genom att diskretisera intervallet med steglängd $h = 0.01$ och simulera den ovan beskriva dynamiken så ska ni bestämma den stationära fördelning av slumpvandrare i intervallet, alltså beräkna sannolikheten $P(x)$ att hitta en slumpvandrare i punkten x. (5 p)

3. Låt $g(t)$ vara en kontinuerlig approximation av antalet gäddor i en viss sjö i mellansverige vid tiden t dagar. Vi har också en motsvarande abborrfrekvensfunktion $a(t)$. Gäddorna äter abborrar och ökar på så sätt sitt antal. Dynamiken kan beskrivas av följande Lotka-Volterra-modell:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a(3.2 - 1.8g) \tag{1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = g(0.8a - 1.5) \tag{2}$$

   Analysera abborre-gäddsystemet ovan. Se speciellt på frågan hur många gäddor måste det finnas vid tiden noll, för att antalet abborrar ska hållas i schack? (5 p)

4. Betrakta en grupp av 1000 personer som parvis spelar Fångarnas dilemma, med följande belöningsmatris:

$$\begin{pmatrix} \pi_{CC} & \pi_{CD} \\ \pi_{DC} & \pi_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   där π_{xy} är belöningen för en spelare med strategi x om denne spelar mot en strategi y.

   a) Beräkna medelbelöningen i populationen som en funktion av n, antalet personer som spelar samarbetsstrategin, om alla spelar mot alla.

   b) Antag att vid varje tidssteg så bildas ett slumpmässigt par av spelare ur populationen som spelar mot varandra, och att spelare 1 byter strategi till spelare 2's strategi med sannolikhet $p = \pi_{s_1 s_2}/(\pi_{s_1 s_2} + \pi_{s_2 s_1})$ och att det omvända sker med sannolikhet $1 - p$. Här betecknar s_i spelare i's strategi.

   Simulera tidsdynamiken för detta system. Verkar det finnas någon stabil fixpunkt?

   c) Hur förändras medelbelöningen över tiden i simulationen? (5 p)