Tentamen i Miljö och Matematisk Modellering för TM Åk 3, MVE345
MVE345 30 maj 2013, 8.30-13.00, KD1 Kemihuset

1. I skogen finns sorkar och rävar. Rävarna äter sorkar och ökar på så sätt sin population. Sorkarnas population minskar å andra sidan mer när det finns många rävar. Men växer annars genom en exponentiell tillväxt. Vid tiden 0 år fanns det 200 rävar i skogen och 1000 sorkar.

   (a) Sätt upp en modell för detta ekologiska samband.

   (b) Ansätt värden på konstanter du tycker kan vara verklighetstrogna (motivera gärna ditt val som inte behöver vara så biologiskt verklighetstroget).

   (c) Programmera din modell med dina parametrar och illustrera både sorkarnas och rävarnas antal under tio år.

   (4 p)

2. Ni ska beräkna och visa i en figur de historiska utsläppen av metan (CH_4) för perioden år 1770-2000. Ni har tillgång till obervationer för hur metans koncentration i atmosfären varit under period 1765- 2005. Ni vet också att metan har en ungefärlig livslängd på 8 år i atmosfären och att relationen melllan koncentration och stock är 2.746 Tg(CH_4)/ppb(CH_4). Observationerna finns tillgängliga i filen `CH4Konc.m` som ligger i mappen
   `\\file00.chalmers.se\home\torbjrn\M3`.
   Alternativt kan ni hämta den här:
   `https://dl.dropboxusercontent.com/u/8018642/CH4Konc.m`.

   (4 p)

3. En population av gräshoppor sprider sig genom en diffusionsprocess på ett sådant vis att diffusionskonstanten beror på densiteten av gräshoppor $n(x, t)$. Ni kan anta att diffusionskonstanten ges av $D(n) = D_0 n(x, t)^m$, där $m > 0$ är ett heltal och D_0 och är en positiv konstant. Beskriv lösningen av diffusionsekvationen i en dimension vid tiden $t = 10$ för olika värden på m då begynnelsetillståndet ges av

   $$n(x, t = 0) = e^{-x^2/\alpha}$$

   där $\alpha = 10^{-2}$ och $D_0 = 10^{-2}$.

   (6 p)

Var god vänd!

4. Ett centralt mått som används för att jämföra klimatmodeller är "Transient Climate Response" (TCR). TCR är definierat som den globala medeltemperaturökningen vid ytan som man får efter 70 år efter att CO_2 koncentrationen (S) har ökat med 1 % per år givet att man startar vid dess för-industriella nivå (S_0).

   Använd följande modell:

$$F = 5.35 \cdot \ln\left(\frac{S}{S_0}\right),$$
$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = F - \frac{T_1}{\lambda} - \kappa(T_1 - T_2),$$
$$C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \kappa(T_1 - T_2).$$

   Där F är radiative forcing (Wm^{-2}), T_1 är ökningen av medeltemperaturen (K) jämfört med den förindustriella nivån i en välblandad box som representerar ythaven, atmosfären och landområden, T_2 är ökningen av medeltemperaturen (K), jämfört med den förindustriella nivån, i en välblandad box som representerar djuphaven. C_1 och C_2 är värmekapaciteten ($JK^{-1}m^{-2}$) för ytboxen respektive djuphavsboxen. κ är värmeledningskoefficienten som beskriver takten på värmeutbytet mellan yt- och djuphavsboxarna, samt λ som är klimatkänslighetsparametern ($KW^{-1}m^{2}$). Baserat på denna modell, besvara följande frågor:

   (a) Simulera och uppskatta TCR.

   (b) Simulera och uppskatta TCR för ett högre, respektive lägre antagande på λ. Testa värden på λ som är ± 0.3 jämfört med grundantagandet (se nedan). Hur beror TCR på λ? Förklara anledningen till att beroendet ser ut som det gör!

   Använd följande parametervärden för modellens grundinställning:

$$C_1 = 4 \cdot 10^8 \ [JK^{-1}m^{-2}]$$
$$C_2 = 5 \cdot 10^9 \ [JK^{-1}m^{-2}]$$
$$\lambda = 0.8 \ [KW^{-1}m^{2}]$$
$$\kappa = 1 \ [WK^{-1}m^{-2}].$$

(6 p)

Skriv ned dina lösningar, lägg till eventuella grafer eller illustrationer och spara lösningarna i fyra separata pdf-filer: Uppgift1.pdf, Uppgift2.pdf, etc. Slutligen lämna in genom att gå in på Ping-pong och ladda upp filerna via en länk under "Inlämningsuppgifter". Detta är enda gången det är tillåtet att gå ut på internet. Lycka till!

Betygsgränser: 3:a 9 p, 4:a 13 p och 5:a 16 p.

Lösningsskisser till Tentamen i Miljö och Matematisk Modellering för TM Åk 3, MVE345
MVE345 30 maj 2013, 8.30-13.00, KD1 Kemihuset

1. I skogen finns sorkar och rävar. Rävarna äter sorkar och ökar på så sätt sin population. Sorkarnas population minskar å andra sidan mer när det finns många rävar. Men växer annars genom en exponentiell tillväxt. Vid tiden 0 år fanns det 200 räv ar i skogen och 1000 sorkar.

   (a) Sätt upp en modell för detta ekologiska samband.
   Låt $r(t)$ vara antal rävar vid år t och $s(t)$ antal sorkar vid samma tid t. De givna förutsättningarna ger att vi som modell kan till exempel använda Lotka-Volterras ansats (men man kan också tänka sig andra ansatser förstås):

   $$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} &= s(k_s - \alpha_s r) \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= r(\alpha_r s - k_r) \end{cases}$$

   där $r(0) = 200$ och $s(0) = 1000$.

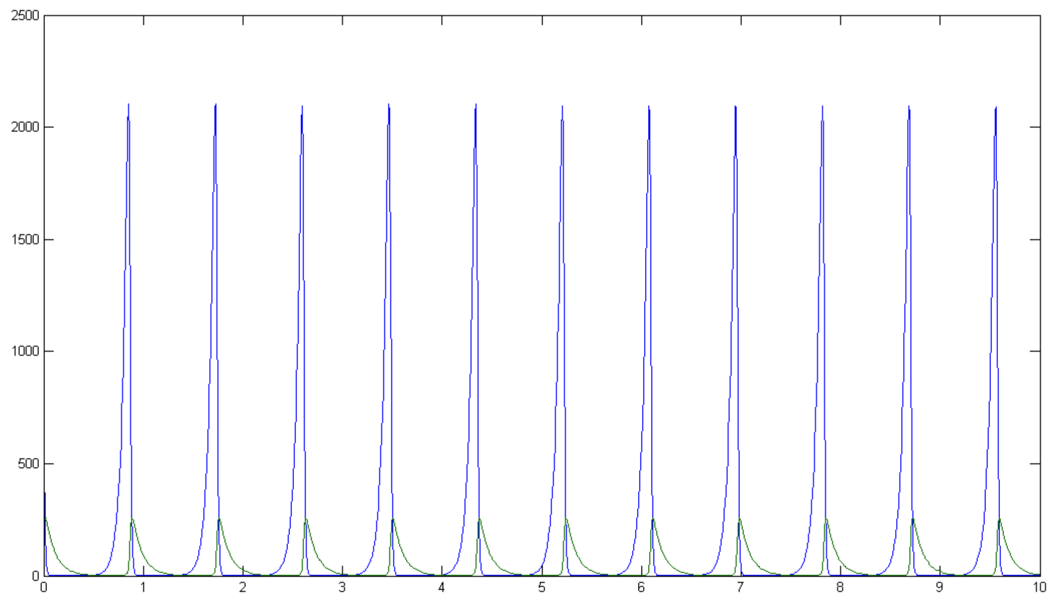
   (b) Ansätt värden på konstanter du tycker kan vara verklighetstrogna (motivera gärna ditt val).
   I modellen ovan kan man tex ansätta $k_s = 20; \alpha_s = 0.5; \alpha_r = .05$ och $k_r = 10$, som skulle kunna motiveras av att vi antar att sorkullarna är hela tjugo ungar. Hälften av rävarna snor åt sig en unge. Det är inte så mycket näring i varje sork ($\alpha_r = .05$) och ùtan sorkar försvinner rävpopulationen snabbt ($k_r = 10$).

   (c) Programmera din modell med dina parametrar och illustrera både sorkarnas och rävarnas antal under tio år.

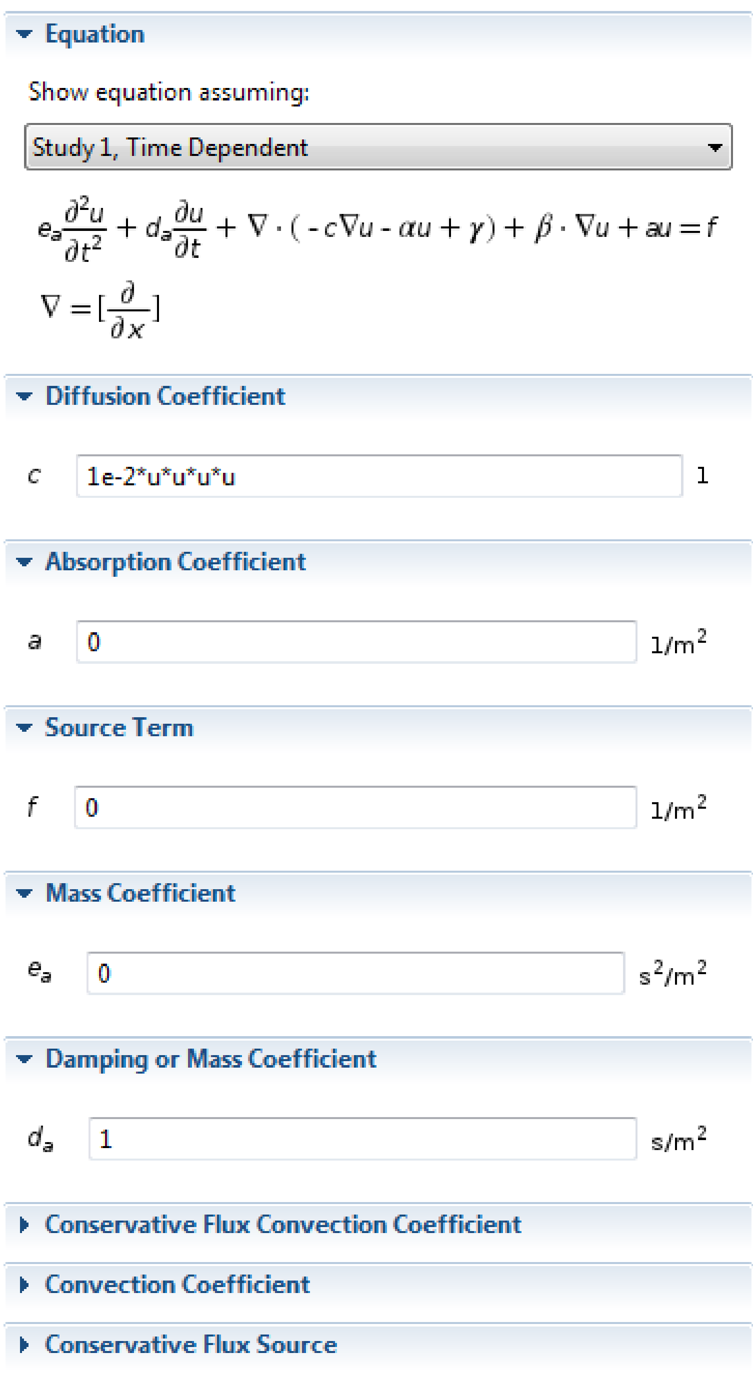
2. Problemet löses tex. med Comsol och toolboxen 'Coefficient form PDE'. Som domän välj en linje som gärna kan vara överdrivet stor och ange lämpliga randvillkor tex. no-flux.

   Knappa in den korrekta diffusionskoefficienten och låt alla andra termer vara lika med noll (se figur 2). Använd sedan en tidsberoende lösning för att undersöka hur lösningen ser ut vid tiden $t = 10$ givet begynnelsetillståndet.

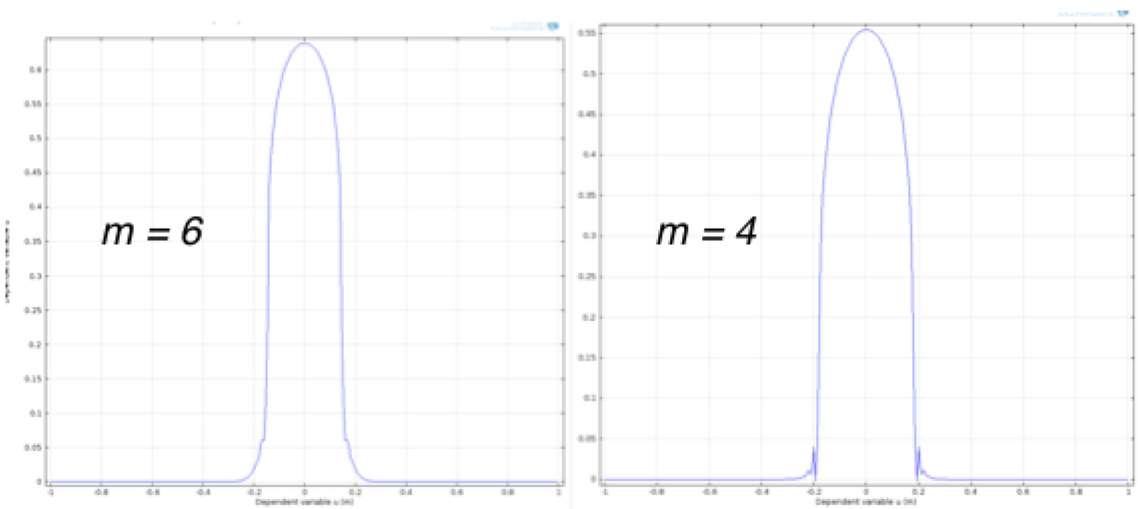
   Generellt gäller att lösningen för högre m är brantare och sprider sig långsammare (se figur 3).



Figur 1: Här är en körning med parametrarna ovan. Den blåa kurvan representerar antalet sorkar och den gröna antalet rävar. Notera att båda arterna riskerar utplåning under varje cykel.



Figur 2: Inställningar i COMSOL.



Figur 3: Lösningar av den icke-linjära diffusionsekvationen för $m = 4$ och 6.

Lösningsförslag

2. Ställ upp ekvation

$$\alpha \frac{\partial C_t}{\partial t} = E_t - \alpha \frac{C_t}{\tau}$$

C-koncentration [ppb]

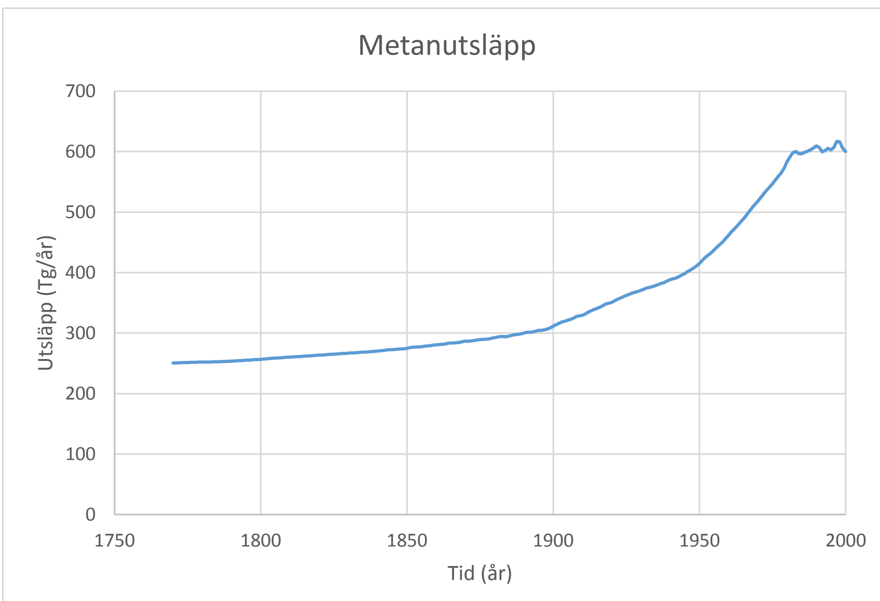
E-emissioner [Tg/år]

α-faktor [Tg(CH4)/ppb(CH4)]

τ- livslängd [år]

Diskterisera (tex tidsteg 1 år, euler framåt) och lös ut E

$$E_t = \alpha \left(C_{t+1} - C_t \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \right)$$



4a)

Diskreterisera ekvationer (tex tidssteg 1 år, Euler framåt)

$$T_1(t+1) = T_1(t) + \frac{F(t)}{C_1} - \frac{T_1(t)}{\lambda \cdot C_1} - \frac{\kappa}{C_1} \cdot \big(T_1(t) - T_2(t)\big)$$

$$T_2(t+1) = T_2(t) + \frac{\kappa}{C_2} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$F(t) = 5.35 \cdot \ln(e^{0.01t}) = 0.0535 \cdot t$$

TCR=1.63°C.

4b) För λ=0.5 $KW^{-1}m^2$ så är TCR=1.23°C, För λ=1.1 $KW^{-1}m^2$ så är TCR=1.9°C, dvs -0.4°C respektive +0.27°C jämfört med grundfallet. Anledningen till att TCR inte skalar linjärt med λ beror på att λ är ett mått på hur starka återkopplingarna är och bestämmer jämviktstemperaturen för en viss radiative forcing (RF) nivå. Återkopplingar i klimatsystemet såsom tex vattenånga och albedo har inte någon uppvärmande effekt förrän temperaturen redan ökat och därmed lett till att halten av vattenånga ökat alternativt snöntäcket minskat (och därmed bidragit till en lägre albedo). Dvs återkopplingarna är iterativa. Därmed är systemets respons långsammare i den mening att för ett RF scenario med ökande (eller konstant) RF så är förhållandet mellan den modellerade temperaturen och jämviktstemperaturen för den specifika RF nivån i en given tidpunkt alltid lägre ju högre klimatkänsligheten är.