Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2020-10-09 kl. 8:30-12:30 plus tid för uppladdning av lösningar 12:30-13:00. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta.

1. (5p) Låt paret (X, Y) av stokastiska variabler ha bivariat täthetsfunktion $f(x, y) = 3x$, $0 < y < x < 1$. Bestäm tätheterna f_X och f_Y och väntevärdena av X och Y. Bestäm också $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

Lösning. Det gäller att $f_X(x) = \int f(x, y)dy = \int_0^x 3xdy = 3x^2$, $0 < x < 1$ och $f_Y(y) = \int f(x, y)dx = \int_y^1 3xdx = 3(1 - y^2)/2$, $0 < y < 1$. Nu gäller att

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

och

$$\mathbb{E}[Y] = \int y f_Y(y)dy = \int_0^1 \frac{3}{2}y(1 - y^2)dy = \frac{1}{4}.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^x xy \cdot 3xdy\,dx = \frac{3}{10}.$$

Därmed är

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{10} - \frac{3}{16} = \frac{9}{80}.$$

2. (5p) För en viss sjukdom finns ett test sådant att för den som är sjuk ger testet positivt utslag med 90% sannolikhet. För den som är frisk ger testet ett positivt utslag med 5% sannolikhet. Hur vanlig måste sjukdomen vara för att det ska gälla att om man testar en på måfå vald person och testet är positivt, så är den betingade sannolikheten att personen har sjukdomen mer än 50%?

Lösning. Låt S vara händelsen att en på måfå vald person har sjukdomen och A vara händelsen att testet ger positivt utslag. Vi är ute efter att bestämma hur litet $\mathbb{P}(S)$ kan vara innan $\mathbb{P}(S|A) \leq 1/2$. Enligt Bayes formel gäller att

$$\mathbb{P}(S|A) = \frac{\mathbb{P}(A|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(A|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(A|S^c)\mathbb{P}(S^c)} = \frac{0.9\mathbb{P}(S)}{0.9\mathbb{P}(S) + 0.05(1 - \mathbb{P}(S))}.$$

Detta uttryck är $1/2$ då $0.9\mathbb{P}(S) = 0.05(1 - \mathbb{P}(S))$, dvs då $\mathbb{P}(S) = 1/19$. Svaret är alltså att $\mathbb{P}(S)$ måste vara minst $1/19$.

3. (5p) Två stickprov, $X_1, \ldots, X_7$ och $Y_1, \ldots, Y_9$ kan antas vara oberoende och ha samma varians σ^2 och väntevärden μ_X respektive μ_Y. Data gav $\overline{X} = 0$, $\overline{Y} = 1$ och $s_X^2 = 1$. Hur stor kan s_Y^2 vara för att testet ska förkasta $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ till förmån för $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ på 5% signifikansnivå?

Lösning. Det symmetriska 95%-iga konfidensintervallet för $\mu_Y - \mu_X$ ges av

$$\mu_Y - \mu_X = \overline{Y} - \overline{X} \pm F_{t_{14}}^{-1}(0.975) s_P \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{9}}.$$

Frågan är alltså när

$$2.14 s_P \sqrt{\frac{16}{63}} = 1$$

dvs då $s_P = 0.93$, dvs då $s_P^2 = 0.86$. Nu är ju

$$s_P^2 = \frac{6s_X^2 + 8s_Y^2}{14}$$

och högerledet är 0.86 då $s_Y^2 = (14 \cdot 0.86 - 6)/8 = 0.75$. Svaret är alltså att det krävs att $s_Y^2 \leq 0.75$.

4. (4p) Ett rättvist mynt singlas tills det för första gången har kommit klave två gånger i rad. Bestäm väntevärde och varians av hur många kast som görs.

Lösning. Låt X vara antalet kast som görs och låt Y vara antalet kast som skulle göras om man startade med att redan ha kastat en klave. Skriv μ_X respektive μ_Y för deras väntevärden. Det gäller att $X = 1 + Z$ där Z med sannolikhet 1/2 är fördelad som X och med sannolikhet 1/2 fördelad som Y. Alltså är

$$\mu_X = 1 + \frac{1}{2}\mu_X + \frac{1}{2}\mu_Y.$$

Vidare gäller att $Y = 1 + U$ där U är 0 med sannolikhet 1/2 och fördelad som X med sannolikhet 1/2. Vi får

$$\mu_Y = 1 + \frac{1}{2}\mu_X.$$

Ekvationssytemet ger $\mu_X = 6$ och $\mu_Y = 4$. Svaret på frågan om väntevärdet är alltså $\mu_X = 6$.

Skriv nu $\tau_X = \mathbb{E}[X^2]$ och $\tau_Y = \mathbb{E}[Y^2]$. Nu är $X^2 = (1+Z)^2 = 1 + 2Z + Z^2$, vilket ger att $\tau_X = 11 + \mathbb{E}[Z^2]$ (ty $\mathbb{E}[Z] = 5$). Dessutom är $\mathbb{E}[Z^2] = (\tau_X + \tau_Y)/2$. Vi får alltså

$$\tau_X = 11 + \frac{1}{2}\tau_X + \frac{1}{2}\tau_Y,$$

dvs

$$\tau_X = 22 + \tau_Y.$$

Vidare är $Y^2 = 1 + 2U + U^2$, så $\tau_Y = 7 + \mathbb{E}[U^2]$ (ty $\mathbb{E}[U] = 3$). Vi har att $\mathbb{E}[U^2] = \tau_X/2$. Vi får alltså

$$\tau_Y = 7 + \frac{1}{2}\tau_X.$$

Sammantaget

$$\tau_X = 29 + \frac{1}{2}\tau_X$$

vilket ger $\tau_X = \mathbb{E}[X^2] = 58$. Då får vi

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 58 - 6^2 = 22.$$

5. (5p) Man har datapunkter (x_k, y_k) och tror att de kommer från det linjära sambandet

$$y_k = a + bx_k + \epsilon_k$$

där ϵ_k:na är oberoende och $N(0, \sigma^2)$-fördelade med en okänd varians σ^2. Om datapunkterna är

$$(0,2),\ (1,2),\ (3,8),\ (4,9)$$

skatta a och b och gör ett 95% symmetriskt konfidensintervall för b.

Lösning. Det här är en standarduppgift. Man beräknar $\sum x_k = 8$, $\sum y_k = 21$, $\sum x_k^2 = 26$, $\sum x_k y_k = 62$ och $\sum y_k^2 = 153$. Detta ger $S_{xy} = \sum x_k y_k - (\sum x_k \sum y_k)/4 = 20$ och analogt $S_{xx} = 10$ och $S_{yy} = 42.75$. Då får vi $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx} = 2$ och $\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{x} = 1.25$. Regressionslinjen blir alltså

$$y = 1.25 + 2x.$$

Vidare är

$$s^2 = \frac{1}{s}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_x x}\right) = 1.375.$$

Konfidensintervallet är alltså

$$b = \hat{b} \pm F_{t_2}^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}} = 2 \pm 4.3 \cdot \sqrt{0.1375} = 2 \pm 1.6.$$

6. (6p) Antag att på eftermiddagen är trafiken vid en viss punkt sådan att den i både nordlig och sydlig riktning utgörs av Poissonprocesser, med intensitet 7 fordon per minut i sydlig riktning och 3 fordon per minut i nordlig riktning.

(a) Vad är sannolikheten att det under en given minut passerar sammanlagt exakt sju fordon?

(b) I ett givet ögonblick, vad är sannolikheten att nästa fordon som passerar åker i sydlig riktning?

(c) Givet att exakt sju fordon totalt passerar en viss minut, vad är den betingade fördelningen för antal fordon som går söderut?

Lösning. Låt X och Y vara antal fordon söderut respektive norrut under en minut. Då gäller att $X \sim \text{Poi}(7)$, $Y \sim \text{Poi}(3)$ och $X + Y \sim \text{Poi}(10)$. I (a) söks

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = e^{-10}\frac{10^7}{7!} \approx 0.09.$$

För del (b), utnyttja att tiden till nästa fordon söderut, T_s, respektive norrut, T_n är oberoende och exp(7)- respektive exp(3)-fördelade. Vi söker

$$\mathbb{P}(T_s < T_n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_n > x) f_{T_s}(x)dx = \int_0^\infty e^{-3x}7e^{-7x} = \frac{7}{10}.$$

För del (c) slutligen,

$$\mathbb{P}(X = x | X + Y = 7) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 7 - x)}{\mathbb{P}(X + Y = 7)} = \frac{e^{-7}\frac{7^x}{x!}e^{-3}\frac{3^{7-x}}{(7-x)!}}{e^{-10}\frac{10^7}{7!}}$$

$$= \binom{7}{x}(\frac{7}{10})^x(\frac{3}{10})^{7-x}.$$

Vi ser alltså att den betingade fördelningen för X givet $X + Y = 7$ är binomial med parametrar 7 och 7/10.

7. (5p) Den stokastiska variabeln X antar värden 0, 1 eller 2. Den momentgenererande funktionen M_X uppfyller att $M_X(\ln 2) = 5/2$ och $M_X(\ln 3) = 14/3$. Bestäm frekvensfuktionen för X.

Lösning. Skriv $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $k = 0, 1, 2$. Det gäller att $M_X(t) = p_0 + p_1 e^t + p_2 e^{2t}$. Därför gäller

$$M_X(\ln 2) = p_0 + 2p_1 + 4p_2 = 1 + p_1 + 3p_2 = \frac{5}{2}$$

och

$$M_X(\ln 3) = p_0 + 3p_1 + 9p_2 = 1 + 2p_1 + 8p_2 = \frac{14}{3}.$$

Här utnyttjade vi att $p_0 = 1 - p_1 - p_2$. Lösningen till ekvationssystemet är $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$ och därmed också $p_0 = 1/6$.

8. (5p) Låt oss anta att parametern μ har en priorfördelning som är $N(0, 1)$. Vi observerar $X \sim N(\mu, 1)$. Vad är posterior för μ givet $X = x$?

Vad är tätheten för μ om X i själva verket är $N(0, 1)$-fördelad? Här menas inte posteriortätheten utan tätheten för μ innan vi observerat X. (Detta är alltså vad vi i vår modell tror om μ om det korrekta värdet, som vi inte känner till, på μ är 0).

Lösning. Det gäller att

$$\begin{aligned} f_{\mu|X}(y|x) &\propto f_{X|\mu}(x|y) f_\mu(y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}((x-y)^2 + y^2)\right) \\ &\propto \exp(y^2 - xy) \propto \exp((y - x/2)^2). \end{aligned}$$

Här har vi i varje led strukit faktorer som inte beror av y. Det sista uttrycket känns igen som tätheten för en $N(x/2, 1/2)$-fördelning (sånär som på en ytterligare faktor som inte beror av y). Svaret på den första delen är alltså att posterior är $N(x/2, 1/2)$.

I del 2 söker vi

$$f_\mu(y) = \int f_{\mu|X}(y|x) f_X(x)dx \propto \exp(-(y - x/2)^2 - x^2/2).$$

Med kvadratkomplettering i exponenten får man att

$$f_{\mu|X}(y|x) \propto \int \exp\left(-\frac{3}{4}(x - 2y/3)^2\right) \exp\left(-\frac{2}{3}y^2\right) dx.$$

Den andra faktorn beror ej av x, så den kan vi bryta ut ur integralen. Den första faktorn är, sånär som på en faktor som inte beror av y, tätheten för en $N(2y/3, 2/3)$ och integrerar sig till nämnda faktor. Det betyder alltså att

$$f_{\mu|X}(y|x) \propto \exp(2y/3).$$

Detta känner vi igen som tätheten, sånär som på en konstant faktor, för $N(0, 3/4)$-fördelningen. Svaret är alltså att tätheten för μ är $N(0, 3/4)$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101