

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321/MVE395/MVE302**

Tid: den 4e juni 2025, 08:30-13:30 TID BEROR PÅ VERSION

Examinator och jour: Erik Broman

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, 4 A4-sidor egenhändigt skrivna anteckningar (2 ark fram och bak eller 4 ark på en sida) samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 6 (respektive 6) frågor om sammanlagt 40 (50) poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

TM:

betyg "3": 20 till 29 poäng

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

F/Kf:

betyg "3": 16 till 23.5 poäng

betyg "4": 24 till 31.5 poäng

betyg "5": 32 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade, motiverade och fullständiga. Svar skall ges på enklast möjliga form. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

Följande formler kan eventuellt vara till nytta:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^c \text{ om } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = c \text{ och } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

1. Kalle är på tivoli och kastar bollar på en burk för att försöka slå ned den. Antag att varje kast kostar 10 SEK, och om Kalle lyckas kasta ned burken så får han 100 SEK (han får inte tillbaka insatsen). Antag vidare att Kalle träffar (vi kan anta att en träff alltid leder till att burken slås ned) varje kast oberoende och med sannolikhet p .

- (a) Om Kalle kastar tills första gången han lyckas träffa burken, vad blir då Kalles förväntade vinst som funktion av p ? (2p)
- (b) Vad är sannolikheten att Kalle träffar sin första träff på ett udda antal kast? (2p)
- (c) Antag nu istället att Kalle kastar tills han har träffat två gånger. Vad är sannolikheten att Kalle sammanlagt behöver k kast för att uppnå två träffar? (2p)

Lösning: Vi låter X vara antalet kast som Kalle behöver till och med första träffen. Vi har att $X \sim \text{Geom}(p)$.

- (a) Vinsten ges av uttrycket $100 - 10X$, så här efterfrågas

$$\mathbb{E}[100 - 10X] = 100 - 10\mathbb{E}[X] = 100 - 10\frac{1}{p},$$

där vi använder vår kunskap om den geometriska fördelningen i det sista steget.

- (b) Vi söker

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ är udda}) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots \\ &= p + p(1-p)^2 + p(1-p)^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k} \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^2)^k = p \frac{1}{1 - (1-p)^2}.\end{aligned}$$

- (c) Låt Y = antalet kast till och med andra träffen. Vi ser här att $Y \in \{2, 3, \dots\}$. För att $Y = k$ krävs det att sista kastet är en träff och att exakt ett av de tidigare $k-1$ kasten skall vara en träff. Därför blir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(\text{Kalle träffar exakt 1 av } k-1 \text{ kast} \cap \text{Kalle träffar kast nummer } k) \\ &= (k-1)p(1-p)^{k-2} \cdot p = (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \text{ för } k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Faktorn $k-1$ kommer från det faktum att den första träffen kan vara vilken som helst av de $k-1$ föregående kasten.

2. Iridium-192 är en radioaktiv isotop av Iridium. Tiden det tar för en Iridium-192 att sönderfalla anses vara exponentialfördelad med parameter $\lambda = 1/74$. Britta har ett litet prov om 10^7 Iridium-192 atomer. Hjälp henne att besvara följande frågor:

- (a) Vad är sannolikheten att en fix Iridium-192 atom har sönderfallit efter en sekund? Vad är sannolikheten att en fix Iridium-192 atom har sönderfallit efter ett dygn? (2p)
- (b) Vad är sannolikheten att det efter ett dygn har sönderfallit minst 1000 fler atomkärnor än förväntat? (3p)
- (c) (**Enbart TM:**) Vad är sannolikheten att minst tre av Brittans atomer har sönderfallit efter en sekund? (2p)
- (d) Antag nu att Britta studerar exakt 3 stycken Iridium-192 atomer lite närmare. Hon döper dem till Knatte, Fnatte och Tjatte. Vad är sannolikheten att Knatte sönderfaller först, följt av att Fnatte sönderfaller och att sist av alla så sönderfaller Tjatte? (2p)

Lösning:

- (a) Låt T beteckna tiden till sönderfall. Sannolikheten att en Iridium-192 har sönderfallit innan tiden t ges av

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Om $t = 1$ (dag) blir detta

$$1 - e^{-1/74} \approx 0.0134.$$

Om istället $t = 1/(3600 \cdot 24)$ (dag) blir detta

$$1 - e^{-t/74} \approx 1.56 \cdot 10^{-7}.$$

- (b) Om vi låter

X_d = antalet atomer som har sönderfallit efter ett dygn

så är $X_d \sim \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(10^7, 0.0134)$ där $p = 0.0134$ kommer från fråga (a). Detta kan med fördel normalapproximeras så att

$$X_d \approx N(\mathbb{E}[X_d], \text{Var}(X_d)) = N(np, np(1-p)),$$

där vi använder våra kunskaper om binomialfördelningen. Vi ser att det förväntade antalet atomkärnor som sönderfallit är

$$\mathbb{E}[X_d] = np \approx 10^7 \cdot 0.0134 = 134000.$$

Vi söker sedan (med $Z \sim N(0, 1)$)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_d \geq np + 1000) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_d - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{np + 1000 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{1000}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq 2.75) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2.75) \\ &\approx 1 - 0.997 = 0.003, \end{aligned}$$

där vi använde tabell.

- (c) Vi kan Poisson-approximera. Om vi låter

X_s = antalet atomer som har sönderfallit innan en sekund

så har vi att $X_s \approx \text{Poi}(\lambda)$ där $\lambda = np = 10^7 \cdot 1.56 \cdot 10^{-7} = 1.56$. Den sökta sannolikheten blir därför

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_s \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X_s \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X_s = 0) - \mathbb{P}(X_s = 1) - \mathbb{P}(X_s = 2) \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \approx 0.206. \end{aligned}$$

- (d) Låt T_K, T_F och T_T beteckna de tre sönderfallstiderna. Vi söker då $\mathbb{P}(T_K > T_F > T_T)$. Vi kan beräkna denna genom att använda den gemensamma täthetsfunktionen för alla tre slumpvariablerna, men det finns ett mycket enklare sätt. Vi observerar att då sönderfallstiderna är likafördelade och oberoende så måste

$$\mathbb{P}(T_K > T_F > T_T) = \mathbb{P}(T_K > T_T > T_F) = \mathbb{P}(T_F > T_K > T_T) = \dots$$

Det finns exakt 6 möjligheter som skall summera till 1, så därför måste vi ha att

$$\mathbb{P}(T_K > T_F > T_T) = \frac{1}{6}.$$

3. Låt X vara binomialfördelad med parametrar n, p (dvs $X \sim \text{Bin}(n, p)$) och låt sedan $Y = n - X$.

- (a) Bestäm $\mathbb{E}[XY]$ och $\text{Cov}(X, Y)$ (dvs kovariansen av X och Y). (4p)
 (b) Låt nu U vara likformigt fördelad på $\{-1, 1\}$, dvs $U \sim U(\{-1, 1\})$ och antag att U är oberoende av X, Y . Låt sedan $Z = UXY$ och beräkna $\text{Cov}(X, Z)$. (2p)

Lösning:

- (a) Vi har att $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ och då $X + Y = n$ gäller det att $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(n) = 0$. Vidare är det välkänt att $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ och därmed blir också $\text{Var}(Y) = n(1 - p)p$. Vi ser därför att

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}{2} = -np(1 - p).$$

Vi har även att

$$\begin{aligned} -np(1 - p) &= \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - np \cdot n(1 - p) \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= n^2p - n^2p^2 - np(1 - p) \\ &= n^2p - n^2p^2 - np + np^2 = np(n - np - 1 + p) \end{aligned}$$

- (b) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Z) &= \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[XUXY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[UXY] \\ &= \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[X^2Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[U]\mathbb{E}[XY] = 0, \end{aligned}$$

där vi använde att $\mathbb{E}[U] = 0$.

4. **Enbart TM:** Låt $X \sim U\{1, 2, 3\}$, dvs X är likformigt fördelad på $\{1, 2, 3\}$.

- (a) Beräkna den momentgenererande funktionen för X . (1p)
 (b) Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en i.i.d. sekvens där X_k har samma fördelning som X i uppgift (a). Beräkna den momentgenererande funktionen för

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - 2n}{\sqrt{n}},$$

och skriv den på enklast möjliga form. (2p)

- (c) Konvergerar Y_n i fördelning när $n \rightarrow \infty$? I sådana fall, mot vilken slumpvariabel? (2p)

Lösning:

- (a) Vi har att

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}] = \sum_{k=1}^3 e^{kt} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^t + e^{2t} + e^{3t}}{3}$$

- (b) Vi har att

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - 2n}{\sqrt{n}} t \right) \right] = e^{-2\sqrt{n}t} \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t/\sqrt{n}) \\ &= e^{-2\sqrt{n}t} M_X(t/\sqrt{n})^n = e^{-2\sqrt{n}t} \left(\frac{e^{t/\sqrt{n}} + e^{2t/\sqrt{n}} + e^{3t/\sqrt{n}}}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{e^{-t/\sqrt{n}} + 1 + e^{t/\sqrt{n}}}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

- (c) Vi ser här att

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \left(\frac{e^{-t/\sqrt{n}} + 1 + e^{t/\sqrt{n}}}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2}) + 1 + 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{3 + \frac{t^2}{n} + O(n^{-3/2})}{3} \right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{3n} + O(n^{-3/2}) \right)^n \rightarrow e^{t^2/3}. \end{aligned}$$

Därmed konvergerar den i fördelning och vi känner igen högersidan som den momentgenererande funktionen för en normalfördelad slumpvariabel med parametrar $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 3/2$.

5. Betrakta en slumpvariabel X med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{x}{a} \exp \left(-\frac{x^2}{2a} \right) \text{ för } x \geq 0,$$

där $a > 0$ är en parameter.

(a) Bestäm momentskattaren (MME:n) för a . (4p)

(b) Bestäm maximum likelihood skattaren (MLE:n) för a . (4p)

Lösning:

(a) Enligt momentmetoden skall vi beräkna väntevärdet av X . Vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx \\ &= \left[-x \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx.\end{aligned}$$

Den sista integralen kan vi räkna ut implicit. Vi har ju att

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx,$$

så vi ser att

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx = \sqrt{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Momentmetoden säger då att vi skall ansätta ekvationen

$$\bar{X} = \sqrt{\hat{a}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ så att } \hat{a} = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2,$$

blir vår momentskattare.

(b) Vi börjar med att beräkna likelihooden:

$$L(a) = \prod_{k=1}^n \frac{X_k}{a} \exp\left(-\frac{X_k^2}{2a}\right) = a^{-n} \left(\prod_{k=1}^n X_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{X_k^2}{2a}\right),$$

och bildar sedan log-likelihooden:

$$l(a) = \log L(a) = -n \log(a) + \sum_{k=1}^n \log(X_k) - \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Vi ser då att

$$l'(a) = -\frac{n}{a} + \frac{1}{2a^2} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

och att

$$l''(a) = \frac{n}{a^2} - \frac{1}{a^3} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Ekvationen $l'(a) = 0$ ger oss lösningen

$$\hat{a} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

och stoppar man in detta i yttrycket för $l''(a)$ så ser vi att

$$l''(\hat{a}) = \frac{n}{\hat{a}^2} - \frac{1}{\hat{a}^3} \sum_{k=1}^n X_k^2 = \frac{1}{\hat{a}^2} \left(n - \frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2} \right) = -\frac{n}{\hat{a}^2} < 0,$$

så vi har hittat ett maximum.

6. Ett gäng forskare har kommit fram till att en viss kvantitet är likformigt fördelat på intervallet $[0, \theta]$, där $\theta > 0$. Problemet är att de inte vet vad värdet på θ är. Forskarna tar därför ett i.i.d. stickprov $X = (X_1, \dots, X_n)$ där $n = 43$ och där $X_k \sim U[0, \theta]$. Medelvärde av dessa mätningar blev 92.3.

- (a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för θ . (5p)
- (b) En av forskarna (Jöns-Harald) kommer i sista ögonblick på att han vill ha ett 95% konfidensintervall för $\theta^{-1/2}$. Hitta ett sådant åt honom. (Motivera och stöd ditt svar med relevanta räkningar.) (2p)

Lösning:

- (a) Vi har begränsat med information, men vi vet att om $X \sim U[0, \theta]$ så är

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2} \text{ och } \text{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

Vi kan nu applicera centrala gränsvärdessatsen på

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \approx N(\mathbb{E}[X_1], \text{Var}(X_1)) = N\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{12n}\right)$$

så en lämplig referensvariabel blir

$$\frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/(12n)}} = \sqrt{12n}(\theta^{-1}\bar{X} - 1/2) = \sqrt{3n}\left(2\frac{\bar{X}}{\theta} - 1\right) \approx N(0, 1).$$

Vi har från tabellen att $z_{0.025} \approx 1.96$ och vi ser då att

$$\begin{aligned} 0.95 &= \mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx \mathbb{P}\left(-1.96 \leq \sqrt{3n}\left(2\frac{\bar{X}}{\theta} - 1\right) \leq 1.96\right) \\ &= \mathbb{P}\left(1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}} \leq 2\frac{\bar{X}}{\theta} \leq 1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{2\bar{X}}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}} \leq \theta \leq \frac{2\bar{X}}{1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}\right) \end{aligned}$$

Ett 95% numeriskt konfidensintervall för θ blir därför

$$I_\theta \approx \left[\frac{2\bar{X}}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}, \frac{2\bar{X}}{1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}} \right] \approx [157.4, 223.1] \approx [157, 223].$$

Om man istället använder "ingenjörssapproachen" får man att

$$\frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/(12n)}} \approx \frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\hat{\theta}^2/(12n)}} = \frac{\bar{X} - \theta/2}{\bar{X}/\sqrt{3n}} \approx N(0, 1),$$

där vi använde att $\hat{\theta} = 2\bar{X}$. Man får då att

$$\begin{aligned} 0.95 &= \mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx \mathbb{P}\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \theta/2}{\bar{X}/\sqrt{3n}} \leq 1.96\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-1.96 \frac{\bar{X}}{\sqrt{3n}} \leq \bar{X} - \theta/2 \leq 1.96 \frac{\bar{X}}{\sqrt{3n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(2\bar{X} - 2 \cdot 1.96 \frac{\bar{X}}{\sqrt{3n}} \leq \theta \leq 2\bar{X} + 2 \cdot 1.96 \frac{\bar{X}}{\sqrt{3n}}\right) \end{aligned}$$

Ett 95% numeriskt konfidensintervall för θ blir därför

$$I_\theta \approx 2\bar{x} \pm 2 \cdot 1.96 \frac{\bar{x}}{\sqrt{3n}} \approx [152.74, 216.45] \approx [153, 216].$$

(b) Vi har från deluppgift (a) att

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx \mathbb{P}\left(\frac{2\bar{X}}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}} \leq \theta \leq \frac{2\bar{X}}{1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}{2\bar{X}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\theta}} \leq \sqrt{\frac{1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}{2\bar{X}}}\right) \end{aligned}$$

så ett 95% numeriskt konfidensintervall för $\theta^{-1/2}$ blir därför

$$I_{\theta^{-1/2}} \approx \left[\sqrt{\frac{1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}{2\bar{x}}}, \sqrt{\frac{1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}}{2\bar{x}}} \right] \approx [0.0669, 0.0797] \approx [0.070, 0.080].$$

Om man istället väljer ingenjörssapproachen får man

$$I_{\theta^{-1/2}} \approx [0.0680, 0.0809] \approx [0.068, 0.081].$$

7. Sömnforskaren Jan-Erik intresserar sig för effekterna av sömnbrist. 8 personer med likartade sömnvanor delades slumpmässigt in i fyra grupper med två individer i varje. Ett försök genomfördes under två dagar. Natten mellan dag 1 och dag 2 fick:

- Grupp 1: 2 timmars sömn
- Grupp 2: 4 timmars sömn
- Grupp 3: 6 timmars sömn
- Grupp 4: 8 timmars sömn

Dag 1 (morgon) fick varje person genomgå ett test som gick ut på att utföra addition av tal under 10 minuter.

Dag 2 (morgon) fick varje person genomgå ett nytt men likvärdigt test med additioner av tal.

För varje person beräknades skillnaden mellan antalet korrekt utförda additioner dag 1 och antalet korrekta additioner dag 2. Resultaten blev som följer:

Grupp nummer	Observerade data
1	39 33
2	25 29
3	10 18
4	4 6

Jan-Erik tror att sambandet mellan antalet timmar sömn (x) och skillnaden i testresultatet (y) ges av ett linjärt samband $y = a + bx$.

(a) Skatta parametrarna a, b . (2p)

(b) Testa

$$H_0 : b = -4$$

$$H_1 : b \neq -4$$

på signifikansnivån $\alpha = 0.05$. (4p)

(c) (**Enbart TM:**) Ta fram enklaste möjliga uttryck (dvs räkna så långt du kan) för styrkan av testet om sanningen är att $b = -3$. (3p)

Lösning: Något irriterande måste vi själva räkna ut S_{xx}, S_{xy} . Det som är viktigt att förstå är att vi har 8 datapunkter och inte 4. Siffer-paret "39,33" står t.ex. för skillnaderna i resultat för medlemmarna i grupp 1.

Vi ser att

$$S_{xx} = 40 \text{ och } S_{xy} = -212.$$

(a) Vi har att

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = -5.3 \text{ och att } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 47.$$

(b) Vi skall alltså testa

$$H_0 : b = -4$$

$$H_A : b \neq -4$$

Vi har att

$$\hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \stackrel{H_0}{=} N\left(b_0, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$$

där $b_0 = -4$. Vi använder därför test-statistikan

$$T = \frac{\hat{b} - b_0}{S_r / \sqrt{S_{xx}}} = \frac{\hat{b} + 4}{S_r / \sqrt{S_{xx}}} \stackrel{H_0}{\sim} t(6),$$

där

$$S_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y})^2 \approx 11.07$$

så att $S_r \approx 3.33$.

Vi förkastar H_0 till förmån för H_A ifall test-statistikan antar till be-
lopp stora värden. Vårt kritiska område för T blir därför

$$(-\infty, -t_{0.025}(6)] \cup [t_{0.025}(6), \infty)$$

där $t_{0.025}(6) \approx 2.45$ enligt tabell. Insatta data ger

$$T(y) = \frac{-5.3 + 4}{3.33/\sqrt{40}} \approx -2.47.$$

Vi kan därför precis förkasta H_0 på signifikansnivån 0.05.

(c) Om $b = -3$ så har vi att

$$\tilde{T} = \frac{\hat{b} + 3}{S_r/\sqrt{S_{xx}}} \stackrel{H_0}{\sim} t(6).$$

Styrkan ges av (med "statistik-notation")

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T \in (-\infty, -t_{0.025}(6)] \cup [t_{0.025}(6), \infty) | b = -3) \\ &= \mathbb{P}(T \leq -t_{0.025}(6) | b = -3) + \mathbb{P}(T \geq t_{0.025}(6) | b = -3) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\hat{b} + 4}{S_r/\sqrt{S_{xx}}} \leq -t_{0.025}(6) | b = -3\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\hat{b} + 4}{S_r/\sqrt{S_{xx}}} \geq t_{0.025}(6) | b = -3\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\hat{b} + 3}{S_r/\sqrt{S_{xx}}} \leq -t_{0.025}(6) - \frac{1}{S_r/\sqrt{S_{xx}}}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\frac{\hat{b} + 3}{S_r/\sqrt{S_{xx}}} \geq t_{0.025}(6) - \frac{1}{S_r/\sqrt{S_{xx}}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(\tilde{T} \leq -4.35) + \mathbb{P}(\tilde{T} \geq 0.55). \end{aligned}$$

Vi kommer tyvärr inte längre då tabellen inte täcker dessa värden.