Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321/MVE395**

Tid: den 29 maj, 2024, 08:30-13:30
Examinator och jour: Erik Broman, mob. 073 7320791,
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, 4 A4-sidor egenhändigt skrivna anteckningar (2 ark fram och bak eller 4 ark på en sida) samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 6 (8) frågor om sammanlagt 40 (50) poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

F/Kf:
betyg 3: 16 till 23.5 poäng
betyg 4: 24 till 31.5 poäng
betyg 5: 32 eller fler poäng.
TM:
betyg 3: 20 till 29.5 poäng
betyg 4: 30 till 39.5 poäng
betyg 5: 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade, motiverade och fullständiga. Svar skall ges på enklast möjliga form. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Daniel är projektledare på ett bygge som använder armeringsjärn. Det finns två typer (typ I och typ II) av armeringsjärn som är tillverkade av olika legeringar och med olika metoder. Om man bockar ett armeringsjärn av typ I går det sönder med sannolikhet 0.03, men om man bockar ett armeringsjärn av typ II går det sönder med sannolikhet 0.7. Praktikanten Curre råkade blanda armeringsjärnen så att det i en hög ligger 200 stycken av typ I och 25 stycken av typ II.

   (a) Daniel plockar ett armeringsjärn ur högen slumpmässigt och bockar det. Vad är sannolikheten att det går sönder? (3p)

   (b) Om armeringsjärnet som Daniel bockar i (a) går sönder, vad är då sannolikheten att det var av typ II? (2p)

   (c) Antag istället att Daniel plockar tre armeringsjärn slumpmässigt ur högen. Vad är sannolikheten att högst ett av armeringsjärnen är av typ II? (2p)

   Lösning:

   (a) Låt $T1$ vara händelsen att Daniel plockar ett armeringsjärn av typ I och låt $T2$ vara händelsen att Daniel plockar ett armeringsjärn av typ II. Vi låter sedan K beteckna händelsen att järnet går sönder (knäcks) vid bockning. Vi söker $\mathbb{P}(K)$ och har att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(K \cap T1) + \mathbb{P}(K \cap T2)\\ &= \mathbb{P}(K|T1)\mathbb{P}(T1) + \mathbb{P}(K|T2)\mathbb{P}(T2) = 0.03\frac{200}{225} + 0.7\frac{25}{225}\\ &= \frac{3}{100}\cdot\frac{8}{9} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{24}{900} + \frac{70}{900} = \frac{94}{900} = \frac{47}{450}.\end{aligned}$$

(b) Vi söker nu $\mathbb{P}(T2|K)$ och har enligt Bayes sats att

$$\mathbb{P}(T2|K) = \mathbb{P}(K|T2)\frac{\mathbb{P}(T2)}{\mathbb{P}(K)} = 0.7\frac{\frac{25}{225}}{\frac{47}{450}} = \frac{35}{47}.$$

(c) Låt X vara antalet armeringsjärn av typ II som Daniel plockar upp. Vi söker då

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\\ &= \frac{\binom{200}{3}}{\binom{225}{3}} + \frac{\binom{200}{2}\binom{25}{1}}{\binom{225}{3}} = \frac{436}{451} \approx 0.9667.\end{aligned}$$

Här har vi använt att man kan plocka 3 armeringsjärn ur en samling av 225 på $\binom{225}{3}$ sätt, att man kan plocka 3 armeringsjärn ur en samling av 200 på $\binom{200}{3}$ sätt etc.

2. Mr Bakos lider av ett märkligt tvångsbeteende. Varje morgon, året om, går Mr Bakos ut med sitt hagelgevär och skjuter lerduvor. Han skjuter tills han fått en träff och sedan går han in och dricker kaffe. Antag att varje skott träffar oberoende av varandra och med sannolikhet 2/3.

(a) Vad är sannolikheten att Mr Bakos under en given morgon inte behöver skjuta mer än 2 skott för att få sin träff? (2p)

(b) Betrakta ovanstående situation under två veckor. Vad är sannolikheten att Mr Bakos inte behöver skjuta mer än 2 skott för att få sin träff under exakt 12 av morgnarna under tvåveckorsperioden? (2p)

(c) Beräkna sannolikheten att under minst 320 av årets 365 morgnar så behöver Mr Bakos inte skjuta mer än 2 skott för att få sin träff. (3p)

Lösning:

(a) Låt X =antalet skott Mr Bakos behöver till och med första träffen. Då är X ∼Geom(p) där $p = 2/3$ enligt uppgift. Den sökta sannolikheten blir därför

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

(b) Låt Y = antalet mornar av de 14 där Mr Bakos inte behöver fler än två träff. Vi har att $Y \sim$Bin(n, p) där $n = 14$ och $p = 8/9$ enligt del (a). Vi söker då

$$\mathbb{P}(Y = 12) = \binom{14}{12} p^{12}(1-p)^2 \approx 0.273.$$

(c) Låt Y_k vara som i (b) fast för $k = 1, 2, \ldots, 365$. Låt sedan $Y = \sum_{k=1}^{365} Y_k$ och observera att vi söker sannolikheten $\mathbb{P}\left(Y \geq 320\right)$. Vi har att $Y \sim$Bin$(365, 8/9)$ men för att kunna räkna måste vi använda normalapproximation. Vi har då att

$$Y \approx N(\mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(Y)) = N\left(365 \cdot \frac{8}{9}, 365 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9}\right) \approx N(324.4, 36.0).$$

Därmed blir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y \geq 320\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 324.4}{\sqrt{36}} \geq \frac{320 - 324.4}{\sqrt{36}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \geq -0.73) = \mathbb{P}(Z \leq 0.73) \approx 0.7673,\end{aligned}$$

där vi använde symmetri och tabell i de två sista stegen.

3. Börgit Schrödinger betraktar två klyvbara atomkärnor vars sönderfallstider här betecknas T_1 respektive T_2.

(a) Börgits katt påstår att den gemensamma täthetsfunktionen för T_1 och T_2 ges av

$$f_{T_1,T_2}(t, s) = 2tse^{-2ts} \text{ för } t, s > 0.$$

Börgit har inte för vana att ta råd av sin katt och är därför skeptisk. Finns det någon möjlighet att katten faktiskt har rätt? (3p)

(b) Vid närmare eftertanke känner Börgit ändå att det är mer rimligt att antaga att sönderfallstiderna är oberoende. Dessutom att de är Exponentialfördelade med parametrar λ_1 respektive λ_2. Beräkna sannolikheten (i termer av λ_1 och λ_2) att den första sönderfallstiden (T_1) är högst hälften av den andra (T_2). (3p)

Lösning

(a) Nej, och detta kan man se på fler olika sätt. T.ex. har vi att marginaltäthetsfunktionen för T_1 i sådana fall skulle bli

$$\begin{aligned}f_{T_1}(t) &= \int_0^\infty f_{T_1,T_2}(t, s)ds \\ &= \int_0^\infty 2tse^{-2ts}ds = \left[s\left(-e^{-2ts}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2ts}ds \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{2t}e^{-2ts}\right]_0^\infty = \frac{1}{2t} \text{ för } t > 0.\end{aligned}$$

Detta är dock ingen täthetsfunktion då vi uppenbarligen har att

$$\int_0^\infty \frac{1}{2t} dt = \infty.$$

(b) Om de är oberoende gäller att

$$f_{T_1,T_2}(t,s) = f_{T_1}(t) f_{T_2}(s) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} \text{ för } s,t > 0.$$

Vi söker $\mathbb{P}(T_1 \leq T_2/2)$ och har då att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq T_2/2) &= \int\int_{t \leq s/2} f_{T_1,T_2}(t,s) dt ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^{s/2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 s} dt ds = \int_0^\infty \left[-\lambda_2 e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 s}\right]_0^{s/2} ds \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 s/2 - \lambda_2 s} ds = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1/2 + \lambda_2)s} ds \\
&= \left[-e^{-\lambda_2 s} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1/2 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1/2+\lambda_2)s}\right]_0^\infty = 1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2}.
\end{aligned}$$

4. **Enbart TM:** Låt $X \sim$Geom(p), dvs X är geometriskt fördelad med parameter p.

(a) Beräkna den momentgenererande funktionen för X (enbart svar ger 0 poäng). (2p)

(b) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av slumpvariabler där $X_n \sim$Geom(λ/n). Visa att $X_n/n \xrightarrow{d} T$ där $T \sim$Exp(λ), dvs att X_n/n konvergerar i fördelning mot en exponentialfördelad slumpvariabel med parameter λ. (3p)

Lösning:

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] &= \sum_{k=1}^\infty e^{tk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^\infty e^{tk} (1-p)^{k-1} p \\
&= pe^t \sum_{k=0}^\infty e^{tk} (1-p)^k = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \text{ för } t < -\log(1-p),
\end{aligned}$$

där vi i näst sista likheten använde att det var en geometrisk summa.

(b) Vi ser nu att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{tX_n/n}\right] &= M_{X_n}(t/n) = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{t/n}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)e^{t/n}} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{n}e^{t/n}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{t}{n}+O(n^{-2})\right)} = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{t/n}}{\frac{\lambda}{n}-\frac{t}{n}+O(n^{-2})} \\ &= \frac{\lambda e^{t/n}}{\lambda - t + O(n^{-1})} \to \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{ för } t<\lambda.\end{aligned}$$

Detta känner vi igen som den momentgenererande funktionen för $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

5. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x) \text{ för } 0 \le x \le 1$$

där $\theta > 0$ är en parameter som vi vill skatta.

(a) Bestäm momentskattaren för parametern θ. (4p)

(b) Antag att man fick följande mätvärden när man simulerade slumpvariabler från fördelningen beskriven av f_X:

data:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
värde	0.19	0.23	0.09	0.31	0.44

Använd dessa mätvärdena för att hitta en numerisk skattning av θ. (1p)

(c) Använd ditt svar i (b) för att uppskatta sannolikheten att nästa mätvärde (dvs x_6) blir minst 1/2. (2p)

Lösning:

(a) Enligt momentmetoden skall vi börja med att beräkna väntevärdet av X. Vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 \theta(\theta+1)x^{\theta}(1-x)dx \\ &= \theta(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta} - x^{\theta+1}dx = \theta(\theta+1)\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} - \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_0^1 \\ &= \theta(\theta+1)\left[\frac{1}{\theta+1}-\frac{1}{\theta+2}\right] = \theta(\theta+1)\frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)} = \frac{\theta}{\theta+2}.\end{aligned}$$

Momentmetoden föreskriver att vi nu skall lösa ut θ ur sambandet

$$\overline{X} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+2} \Leftrightarrow (\hat{\theta}+2)\overline{X} = \hat{\theta} \Leftrightarrow \hat{\theta}(1-\overline{X}) = 2\overline{X}$$

så att till slut

$$\hat{\theta} = \frac{2\overline{X}}{1-\overline{X}}.$$

(b) Vi har att $\overline{x} = 0.252$ så att

$$\hat{\theta}(x) = \frac{2\overline{x}}{1-\overline{x}} \approx 0.6738.$$

(c) Vi söker nu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 1/2) &= \int_{1/2}^{1} \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)dx \\
&= \int_{1/2}^{1} \theta(\theta+1)x^{\theta-1}dx - \int_{1/2}^{1} \theta(\theta+1)x^{\theta}dx \\
&= [(\theta+1)x^{\theta}]_{1/2}^{1} - [\theta x^{\theta+1}]_{1/2}^{1} \\
&= (\theta+1)(1-2^{-\theta}) - \theta(1-2^{-\theta-1}) \approx 0.162,
\end{aligned}$$

om vi använder att $\theta = 0.6738$.

6. En naturruta är en kvadrat med sidlängd exakt 1 meter någonstans i naturen. Antalet spindlar i en sådan naturruta anses vara Poisson-fördelat med parameter λ. Vid en större undersökning genomförd för 20 år sedan kom man fram till att antalet spindlar i en typisk naturruta i naturreservatet Arachnia var 130 stycken, dvs att λ i det fallet var 130.

   Forskare misstänker nu att antalet spindlar i Arachnia har minskat, då detta är en olycklig trend över hela världen. I en undersökning räknade man antalet spindlar i 56 naturrutor (i Arachnia) och man fann att medelantalet spindlar i dessa rutor var 121.3.

   Använd informationen ovan för att skapa ett 95% konfidensintervall för att undersöka om antalet spindlar har minskat. (6p)

   Lösning: Låt $X_1, \ldots, X_{56}$ vara antalet spindlar per naturruta. Vi antar att dessa är i.i.d. och med fördelning Poi(λ). Då n är stort kan vi använda CGS (Centrala GräsnvärdesSatsen) för att se att

$$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{d}{\approx} N\left(\mathbb{E}[X_1], \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}\right).$$

   Vidare har vi att då $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ så gäller att

$$\mathbb{E}[X_1] = \lambda \text{ och att } \mathrm{Var}(X_1) = \lambda$$

   så att

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{d}{\approx} N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right).$$

   Vi vet att det kommer bli svårt att räkna med λ i variansuttrycket så vi gör därför den ytterligare approximationen

$$\overline{X} \overset{d}{\approx} N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right) \overset{d}{\approx} N\left(\lambda, \frac{\hat{\lambda}}{n}\right).$$

Vi använder nu referensvariabeln

$$R = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \overset{d}{\approx} N(0,1).$$

Vi vill ha ett konfidensintervall på formen $[0, c]$ (om vårt 95% konfidensintervall skulle bli säg $[0, 119]$ så verkar det ju intuitivt rimligt att $\lambda < 130$ men om det blir $[0, 140]$ kan vi inte utesluta att $\lambda = 130$).

Vi ser då att (med $Z \sim N(0,1)$)

$$0.95 = \mathbb{P}(Z \geq -1.64) \approx \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \geq -1.64\right) = \mathbb{P}(\lambda \leq \overline{X} + \sqrt{\hat{\lambda}/n} \cdot 1.64),$$

så ett 95% numeriskt konfidensintervall för λ blir i vårt fall

$$I_\lambda = [0, \overline{x} + \sqrt{\hat{\lambda}(x)/n} \cdot 1.64] = [0, \overline{x} + \sqrt{\overline{x}/56} \cdot 1.64] \approx [0, 123.7].$$

7. SkumRask tillverkar isolerskum som skall användas i byggen. De hävdar att halten asbest i deras isolerskum inte är mer än 4%. Konsumentverket misstänker att de ljuger och köper därför in 30 varuprover med isolerskum från SkumRask. Konsumentverket låter därefter testa de 30 varuproverna och får att samplingsmedelvärdet blir $\overline{x} = 5.2$ med samplingsvariansen $s^2(x) = 2.2$. Konsumentverket antar att data kommer från en normalfördelning.

   (a) Sätt upp ett lämpligt hypotestest för att testa Konsumentverkets misstankar. (2p)

   (b) Om man väljer signifikansnivån $\alpha = 0.05$, vad blir då motsvarande kritiska område (ibland kallat förkastningsregion)? (3p)

   (c) Utför testet i (a) på signifikansnivån $\alpha = 0.05$. Vilken slutsats drar du? Vilken typ av fel riskerar du att göra? (2p)

   Lösning:

   (a) Om $X_1, \ldots, X_n$ får representera halterna asbest i de 30 varuproverna (innan mätning) så har vi enligt antagandet att $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ där μ och σ^2 är okända. För att testa ifall halten asbest överstiger 4% så använder vi följande hypoteser:

   $$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 4 \\ H_1 &: \quad \mu > 4. \end{aligned}$$

   (b) Punktskattaren för μ är $\overline{X}$ och vi vet att

   $$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{30}\right) = N\left(4, \frac{\sigma^2}{30}\right)$$

där likheten är sann om H_0 är sann. Vi ser därför att

$$\frac{\overline{X}-4}{\sigma/\sqrt{30}} \sim N(0,1) \text{ och att } \frac{\overline{X}-4}{s(X)/\sqrt{30}} \sim t(n-1) = t(29)$$

om H_0 är sann. Vi väljer därför test-statistikan

$$T(X) = \frac{\overline{X}-4}{s(X)/\sqrt{30}}$$

och förkastar H_0 ifall $T(X)$ "blir för stor". Den kritiska regionen blir då på formen $C = [c, \infty)$ där c bestäms av att

$$\alpha = 0.05 = \mathbb{P}(T(X) \in C) = \mathbb{P}(T(X) \geq c),$$

och t-tabellen ger att $t_{0.05}(29) \approx 1.7$. Vi har därför att $c = 1.7$ och vårt kritiska område blir därför

$$C = [1.7, \infty).$$

(c) Med insatta data får vi att

$$T(x) = \frac{\overline{x}-4}{s(x)/\sqrt{30}} = \frac{5.2-4}{\sqrt{2.2}/\sqrt{30}} \approx 4.43$$

och då $T(x)$ tillhör det kritiska området förkastar vi H_0 på signifikansnivån $\alpha = 0.05$. Vi riskerar då att göra ett typ I fel, i detta fall att vi anklagar SkumRask för att ljuga om asbesthalten trots att de inte gör det.

8. **Endast TM:** Señor Chang genomför experiment som lyckas med okänd sannolikhet p. Señor Chang gör flera experiment-serier där han i varje serie upprepar experimenten tills första gången de lyckas. Señor Chang vet inte vad värdet på p är, men han antar en prior-fördelning som är (diskret) likformig på $\{1/3, 2/3\}$.

(a) Antag att i señor Changs första experimentserie så behövde han göra sammanlagt 3 experiment tills det första lyckades, och i sin andra serie behövde han göra sammanlagt 2 experiment tills det första lyckades. Baserat på denna information, beräkna posteriori-fördelningen för p. (4p)

(b) Hitta lämplig skattare av p baserat på ditt svar i uppgift (a). (1p)

Lösning:

(a) Vi söker här

$$\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\middle|D=3,2\right)=\frac{\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\right)}{\mathbb{P}\left(D=3,2\right)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\right)}{\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\right)+\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{2}{3}\right)\mathbb{P}\left(p=\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)}{\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)+\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{2}{3}\right)}.$$

Om $X\sim$Geom(p) så gäller att

$$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1} \text{ för } k=1,2,\ldots$$

och vi ser därför att

$$\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{1}{3}\right)=\mathbb{P}\left(D=3\middle|p=\frac{1}{3}\right)\mathbb{P}\left(D=2\middle|p=\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2^3}{3^3}=\frac{2^3}{3^5}=\frac{8}{243}$$

och på samma sätt att

$$\mathbb{P}\left(D=3,2\middle|p=\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{2^2}{3^5}=\frac{4}{243}.$$

Därför ser vi till slut att

$$\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\middle|D=3,2\right)=\frac{\frac{8}{243}}{\frac{8}{243}+\frac{4}{243}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

så att

$$\mathbb{P}\left(p=\frac{2}{3}\middle|D=3,2\right)=1-\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\middle|D=3,2\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

(b) Mod-skattaren ger $\hat{p}=\frac{2}{3}$ och väntevärdes-skattaren blir

$$\mathbb{E}\left[p\middle|D=3,2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\mathbb{P}\left(p=\frac{1}{3}\middle|D=3,2\right)+\frac{2}{3}\mathbb{P}\left(p=\frac{2}{3}\middle|D=3,2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}.$$