Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-10-08 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = c(\sin x + \cos y)$, $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$. Bestäm konstanten c, marginaltätheterna för X och Y, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

2. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel som har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \ -\infty < x < \infty,$$

där θ är en okänd parameter. Gör en ML-skattning av θ.

3. (5p) Det ligger tre tärningar i en hatt. En är en vanlig sexsidig tärning, en är fyrsidig och en är åttasidig. En av dem väljs på måfå och kastas fem gånger. Du får reda på att inget av kasten visade mer än fyra. Vad är den betingade sannolikheten givet den informationen att det var den n-sidiga tärningen, $n = 4, 6, 8$, som valdes ur hatten?

4. (5p) Betrakta två oberoende Poissonprocesser, A och B, med intensiteter 2 respektive 7 impulser per minut.

(a) Vad är sannolikheten att det under tio sekunder inte kommer någon impuls alls?

(b) Vad är sannolikheten att det under en halv minut kommer exakt en impuls i A?

(c) Vad är den betingade sannolikheten, givet att det under tid t kommer totalt fem impulser, att exakt två av dem är från A?

5. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likformigt fördelade mellan 0 och 1. Skriv $X_{(j)}$ fär den $j : te$ minsta av dessa stokastiska variabler. Låt $0 < c < 1$ vara ett fixt tal och visa att för $x \in (0, 1)$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(X_{(\bar{cn})} - c\right) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{c(1-c)}}\right).$$

Här står $\bar{cn}$ för cn avrundat uppåt till närmaste heltal. (I dina räkningar är det helt ok om du låtsas som att cn är ett heltal för varje n).

6. (5p) Låt X_1, X_2, X_3 vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och varians σ^2.

(a) Om det är känt att $\sigma = 1$ och det observerats att $X_1 = X_2 = 0$, finns det värden på X_3 sådana att $H_0 : \mu = 0$ förkastas till förmån för $H_A : \mu > 0$ på signifikansnivå 95%? I så fall, vilka värden?

(b) Samma fråga som i (a), men med σ^2 okänd.

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2. Hur stort behöver n vara för att sannolikheten att ett symmetriskt konfidensintervall av konfidensgrad 95% för μ med sannolikhet minst 95% har en längd som inte överstiger σ?

8. (5p) Låt X och Y vara positiva kontinuerliga stokastiska variabler med felintensiteter r_X respektive r_Y.

(a) Visa att om $r_X(t) \leq r_Y(t)$ for alla $t > 0$, gäller att $\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x)$ för alla $x > 0$.

(b) Beräkna tätheten för X om $r_X(t) = t^2$.

(c) Visa att om $r_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ gäller att $\mathbb{P}(X = \infty) = e^{-\pi/2}$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101

Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-10-08 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = c(\sin x + \cos y)$, $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$. Bestäm konstanten c, marginaltätheterna för X och Y, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

Lösning. Det gäller att

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos y) dx\, dy = \pi,$$

så $c = 1/\pi$ eftersom en täthet måste ha totalintegral 1. Marginaltätheten för X ges av

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos y) dy = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\pi},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

På samma sätt får man

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos y) dx = \frac{1}{2} \cos y + \frac{1}{\pi},\ 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Detta ger

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\pi} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{\pi/2} y \left(\frac{1}{2} \cos y + \frac{1}{\pi} \right) dy = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}.$$

För att få kovariansen, börja med

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy(\sin x + \cos y) dx,\ dy = \frac{\pi^2}{16}.$$

Detta ger

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = \frac{\pi^2}{16} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{64} (\pi - 4)^2.$$

2. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel som har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|},\ -\infty < x < \infty,$$

där θ är en okänd parameter. Gör en ML-skattning av θ.

Lösning. Likelihood för stickprovet är

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} e^{-|x_k - \theta|} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\sum_k |x_k - \theta|}.$$

Vi ska maximera m.a.p. θ och ser direkt att vi ska minimera $s(\theta) := \sum_k |x_k - \theta|$ m.a.p. θ. Låt $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ vara x_k:na uppräknade i storleksordning nedifrån och upp. På intervallet $[x_{(j)}, x_{(j+1)}]$ (där vi skriver $x_{(0)} = -\infty$ och $x_{(n+1)} = \infty$) gäller att

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^{j} (\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^{n} (x_{(i)} - \theta).$$

Detta ger, på $(x_{(j)}, x_{(j+1)})$,

$$s'(\theta) = j - (n - j) = 2j - n.$$

Vi får nu två fall, beroende på om n är udda eller jämnt. Om n är udda, skriv $m = x_{((n+1)/2)}$, dvs m är medianen av x_k:na. Då gäller $s'(\theta) < 0$ för $\theta < m$ och $s'(\theta)$ för $\theta > m$. Alltså blir minimipunkten $\hat{\theta} = m$. Om n är jämnt finns ingen naturlig median, men man brukar säga att varje tal $m \in [x_{(n/2)}, x_{(n/2+1)}]$ är en median. Vi ser att s har sitt minimum i varje sådan punkt m, så varje lösning $\hat{\theta} = m$ där m är en median är en ML-skattning. Sammanfattningsvis, för godtyckligt n, får vi

$$\hat{\theta} = m$$

för godtyckligt vald median till x_k:na.

3. (5p) Det ligger tre tärningar i en hatt. En är en vanlig sexsidig tärning, en är fyrsidig och en är åttasidig. En av dem väljs på måfå och kastas fem gånger. Du får reda på att inget av kasten visade mer än fyra. Vad är den betingade sannolikheten givet den informationen att det var den n-sidiga tärningen, $n = 4, 6, 8$, som valdes ur hatten?

Lösning. Låt A_n vara händelsen att det var den n-sidiga tärningen som valdes och låt B vara händelsen att inget kast visade högre än 4. Vi vill beräkna $\mathbb{P}(A_n|B)$ och använder Bayes formel:

$$\mathbb{P}(A_n|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_k \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Nu ju $\mathbb{P}(A_n) = 1/3$ för alla n, så det går att förkorta så att just i det här fallet får vi

$$\mathbb{P}(A_n|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_n)}{\sum_k \mathbb{P}(B|A_k)}.$$

När är ju

$$\mathbb{P}(B|A_4) = 1,\ \mathbb{P}(B|A_6) = (2/3)^5,\ \mathbb{P}(B|A_8) = (1/2)^5,$$

så

$$\mathbb{P}(A_4|B) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5},\ \mathbb{P}(A_6|B) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5},\ \mathbb{P}(A_8|B) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5}.$$

Detta ger approximativt

$$\mathbb{P}(A_4|B) \approx 0.860,\ \mathbb{P}(A_6|B) \approx 0.113,\ \mathbb{P}(A_8|B) \approx 0.027.$$

4. (5p) Betrakta två oberoende Poissonprocesser, A och B, med intensiteter 2 respektive 7 impulser per minut.

(a) Vad är sannolikheten att det under tio sekunder inte kommer någon impuls alls?

(b) Vad är sannolikheten att det under en halv minut kommer exakt en impuls i A?

(c) Vad är den betingade sannolikheten, givet att det under tid t kommer totalt fem impulser, att exakt två av dem är från A?

Lösning. I (a) frågas det om antalet punkter i den sammavägda Poissonprocessen. Den har intensitet 9, så antalet impulser, X, under tid 1/6 minut är Possonfördelat med parameter 3/2. Alltså blir

$$P(X=0)=e^{-3/2}.$$

I (b) handlar det om antalet impulser, Y, i A, som har intensistet 2 och tiden som avses är en halv minut, så $Y \sim Poi(1)$. Därför är

$$P(X=1)=e^{-1}\frac{1^1}{1!}=e^{-1}.$$

Om vi skriver X_A och X_B för antalet impulser i respektive process, så är dessa oberoende och $Poi(2t)-$ respektive $Poi(7t)$-fördelade. Alltså

$$\begin{aligned}
P(X_A=2|X_A+X_B=5) &= \frac{P(X_A=2, X_A+X_B=5)}{P(X_A+X_B=5)} \\
&= \frac{P(X_A=2, X_B=3)}{P(X_A+X_B=5)} \\
&= \frac{e^{-2t}\frac{(2t)^2}{2!}e^{-7t}\frac{(7t)^3}{3!}}{e^{-9t}\frac{(9t)^5}{5!}} \\
&= \binom{5}{2}\frac{2^2\,7^3}{9^5} \\
&\approx 0.2323.
\end{aligned}$$

5. (5p) Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende och likformigt fördelade mellan 0 och 1. Skriv $X_{(j)}$ fär den $j:te$ minsta av dessa stokastiska variabler. Låt $0<c<1$ vara ett fixt tal och visa att för $x \in (0,1)$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(X_{(\bar{cn})}-c\right) \le x\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{c(1-c)}}\right).$$

Här står $\bar{cn}$ för cn avrundat uppåt till närmaste heltal. (I dina räkningar är det helt ok om du låtsas som att cn är ett heltal för varje n).

Lösning. Vi skriver j för $\bar{cn}$ i räkningar för enkelhets skull och för att förenkla ytterligare skriver antar vi att cn är ett heltal eftersom felet detta medför kommer att vara uppenbart försumbart. Att $\sqrt{n}(X_{(j)}-c) \le x$ är ekvivalent med $X_{(j)} \le c + x/\sqrt{n}$, vilket i sin tur är ekvivalent med att minst j stycken av X_k:na är mindre än $c+x/\sqrt{n}$. Antalet sådana X_k (skriv Y_n för det antalet) är $Bin(n, n(c+x/\sqrt{n}))$. Detta medför att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sqrt{n}(X_{(j)}-c) \le x) &= \mathbb{P}(Y_n \ge cn) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Y_n - nc - \sqrt{n}x}{\sqrt{(nc+\sqrt{n}x)(1-c-x/\sqrt{n})}} \ge \frac{-\sqrt{n}x}{\sqrt{(nc+\sqrt{n}x)(1-c-x/\sqrt{n})}}\right) \\
&\to \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{c(1-c)}}\right),
\end{aligned}$$

där den sista slutsatsen följer av de Moivre-Laplace gränsvärdessats och det faktum att högersidan i olikheten konvergerar mot $x/\sqrt{c(1-c)}$.

6. (5p) Låt X_1, X_2, X_3 vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och varians σ^2.

(a) Om det är känt att $\sigma = 1$ och det observerats att $X_1 = X_2 = 0$, finns det värden på X_3 sådana att $H_0 : \mu = 0$ förkastas till förmån för $H_A : \mu > 0$ på signifikansnivå 95%? I så fall, vilka värden?

(b) Samma fråga som i (a), men med σ^2 okänd.

Lösning. I (a) är det nedåt begränsade konfidensintervallet

$$\mu = \overline{X} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{3}} = \overline{X} - 1.64\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nollhypotesen förkastas alltså om $\overline{X} > 1.64/\sqrt{3}$. Med $X_1 = X_2 = 0$ är $\overline{X} = X_3/3$, så detta sker om $X_3 > 1.64\sqrt{3} \approx 2.84$.

I (b) krävs $\overline{X} > 1.64s/\sqrt{3}$. Det gäller som bekant att

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2,$$

vilket eftersom $\overline{X} = X_3/3$, blir

$$s^2 = 2 \cdot \left(0 - \frac{X_3}{3}\right)^2 + \left(X_3 - \frac{X_3}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}X_3^2.$$

Vi förstår att X_3 måste vara positivt för att H_0 öht ska kunna förkastas, så vi får $1.64s/\sqrt{3} = 1.64X_3/3$. Kravet för att förkasta blir alltså $X_3/3 > 1.64X_3/3$, vilket aldrig sker. Svaret är alltså att H_0 inte förkastas för några värden på X_3.

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2. Hur stort behöver n vara för att sannolikheten att ett symmetriskt konfidensintervall av konfidensgrad 95% för μ med sannolikhet minst 95% har en längd som inte överstiger σ?

Lösning. Det 95%-iga konfidensintervallet har längd $2F_{t_{n-1}}^{-1}(0.975)s/\sqrt{n}$ vilket understiger σ om

$$\frac{2F_{t_{n-1}}^{-1}(0.975)s/\sqrt{n}}{\sigma} < 1.$$

Detta sker precis då

$$\frac{s^2}{\sigma^2} < \frac{n}{4t(n-1)^2},$$

där vi för enkelhets skull skrivet $t(n-1) = F_{t_{n-1}}^{-1}(0.975)$. Vi utnyttjar att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Olikheten kan skrivas som

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \frac{n(n-1)}{4t(n-1)^2},$$

så det gäller att finna n så att

$$F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{n(n-1)}{4t(n-1)^2}\right) > 0.95.$$

Genom prövning får man nu att det krävs $n \geq 26$.

8. (5p) Låt X och Y vara positiva kontinuerliga stokastiska variabler med felintensiteter r_X respektive r_Y.

(a) Visa att om $r_X(t) \leq r_Y(t)$ for alla $t > 0$, gäller att $\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x)$ för alla $x > 0$.

(b) Beräkna tätheten för X om $r_X(t) = t^2$.

(c) Visa att om $r_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ gäller att $\mathbb{P}(X = \infty) = e^{-\pi/2}$.

Lösning. Det gäller per definition för en kontinuerlig stokastisk variabel U att $r_U(t) = f_U(t)/G_U(t) = -G'_U(t)/G_U(t)$ där $G_U(t) = \mathbb{P}(U > t)$. Från det följer det

$$\mathbb{P}(U > x) = e^{-\int_0^x r_U(t)dt}.$$

Om $r_X \leq r_Y$ gäller att $\int_0^x r_X(t)dt \leq \int_0^x r_Y(t)dt$ för alla x och därmed $\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x)$. För (b) räknar vi ut $\int_0^x t^2 dt = x^3/3$, vilket ger $G(x) = e^{-x^3/3}$ och

$$f(x) = -G'(x) = x^2 e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Slutligen gäller enligt kontinuitet för sannolikhetsmått att

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X > x)$$

och eftersom

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$$

får vi

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{x\to\infty} e^{-\arctan x} = e^{-\pi/2}.$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101