Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-08-15 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = c \sin(x + y)$, $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$. Bestäm konstanten c, marginaltätheten för X, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

2. (5p) Pelle och Lotta sitter i varsin kassa på ICA. Lotta har haft jobbet lite längre än Pelle och därför betjänar hon kunder i genomsnitt lite snabbare. En given kund betjänas av Lotta på en tid som är exponentialfördelad med parameter 1, medan tiden som Pelle behöver för att betjäna en kund är exponentialfördelad med parameter 2/3. Tidsenhet är minuter.

   (a) Hur stor är sannolikheten att Pelle använder mer än två minuter för att betjäna en kund?

   (b) Hur stor är sannolikheten att Lotta blir klar med den kund hon betjänar just nu innan Pelle blir klar med den kund han betjänar just nu?

   (c) Om det står tre kunder i Lottas kassa (den som betjänas nu plus två till) och två kunder i Pelles, vad är sannolikheten att du kommer fram till betjäning snabbare om du ställer dig i Lottas än om du ställer dig i Pelles kö?

3. (5p) Du är lärare och ska rätta tentor skriva av de tre studenterna Lisa, Kalle och Emma. Tentorna skrivs förstås under anonym kod, men du känner studenterna och uppskattar att Lisa svarar rätt på en given fråga med sannolikhet 0.8. Motsvarande för Kalle och Emma är 0.65 och 0.5. Detta tror du gäller för samtliga 20 frågor på tentan och oberoende för de olika frågorna. Om du tar en av tentorna på måfå, rättar och ser att den fick 11 poäng, vad är den betingade sannolikheten att tentan är skriven Lisa, Kalle respektive Emma?

4. (5p) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variabel som har frekvensfunktionen
$$p_X(j) = C(\theta)\theta^j,\ j = 0, 1, 2.$$
   Här är θ en positiv parameter. Bestäm $C(\theta)$ och gör en ML-skattning av θ.

5. (5p) Betrakta vanlig linjär regression på formen
$$y_k = a + bx_k + \epsilon_k,\ k = 1, \ldots, n.$$
   Antag att $n = 3$ och $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

   (a) Visa att ML-skattningen av b inte beror av y_2.

   (b) Om $y_1 = -1$ och $y_3 = 1$, för vilka värden på y_2 kan nollhypotesen $H_0 : b = 0$ förkastas till förmån för $H_A : b > 0$ på 5% signifikansnivå?

6. (5p)

(a) Låt X och V vara stokastiska variabler. Visa att

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}(X|V)] + \mathbb{V}\text{ar}(\mathbb{E}[X|V]).$$

(b) Låt X vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(x-\mu\right) + \Phi\left(\frac{x-3\mu}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Här är μ en reell konstant. Bestäm $\mathbb{E}[X]$ och $\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

(c) Låt X vara som i (b) och låt vidare $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på X och antag att n är stort. Bestäm approximativt

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq 3\mu\right).$$

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2.

(a) Om $n = 10$ och stickprovsvariansen s^2 visade sig bli 2.44, konstruera ett nedåt begränsat 95% konfidensintervall för σ^2.

(b) Hur stort behöver n vara för att testet $H_0 : \sigma^2 = 1$ mot $H_A : \sigma^2 > 1$ på 5% signifikansnivå ska ha en styrka på minst 95% om det sanna värdet på σ^2 är 7?

8. (5p) Låt Θ vara en stokastisk variabel som är $\beta(1,2)$-fördelad och låt sedan, givet att $\Theta = \theta$, X vara $\beta(4\theta, 4(1-\theta))$-fördelad. Beräkna

$$\frac{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{3}\right)}{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{5}\middle|\frac{1}{3}\right)}.$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101

Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-08-15 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = c\sin(x + y)$, $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$. Bestäm konstanten c, marginaltätheten för X, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

Lösning. Eftersom $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x + y)dx\,dy = 2$ gäller att $c = 1/2$. Marginaltätheten ges av

$$f_X(x) = \int f(x, y)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(x + y)dy = \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$

Därför gäller

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(\sin(x) + \cos(x))dx = \frac{\pi}{4}.$$

Eftersom X och Y uppenbart har samm fördelning gäller också $\mathbb{E}[Y] = \pi/4$. Vidare är

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{12}{\int}{}_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x + y)dx\,dy = \frac{\pi - 2}{2}.$$

Därmed är

$$\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) = \frac{\pi - 2}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx -0.04.$$

2. (5p) Pelle och Lotta sitter i varsin kassa på ICA. Lotta har haft jobbet lite längre än Pelle och därför betjänar hon kunder i genomsnitt lite snabbare. En given kund betjänas av Lotta på en tid som är exponentialfördelad med parameter 1, medan tiden som Pelle behöver för att betjäna en kund är exponentialfördelad med parameter 2/3. Tidsenhet är minuter.

(a) Hur stor är sannolikheten att Pelle använder mer än två minuter för att betjäna en kund?

(b) Hur stor är sannolikheten att Lotta blir klar med den kund hon betjänar just nu innan Pelle blir klar med den kund han betjänar just nu?

(c) Om det står tre kunder i Lottas kassa (den som betjänas nu plus två till) och två kunder i Pelles, vad är sannolikheten att du kommer fram till betjäning snabbare om du ställer dig i Lottas än om du ställer dig i Pelles kö?

Lösning. Om X är den tid som det tar för Pelle att betjäna en kund gäller att det i (a) söks $\mathbb{P}(X > 2) = e^{-(2/3)\cdot 2} = e^{-4/3}$.

Låt Y vara den tid det tar för Lotta att betjäna en kund. Då söks i (b) (enligt glömskeegenskapen)

$$\mathbb{P}(X > Y) = \int_0^\infty P(X > Y|Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^\infty e^{-2y/3} e^{-y} dy = \frac{3}{5}.$$

För (c): Det går snabbare i Lisas kö om ordningen i vilken kunder blir klara tills Lisa är klar är någon av LLL, LLPL, LPLL eller PLLL. Tack vare gömskeegenskapen blir sannolikheten för den första av dessa $(3/5)^3$ och för övriga alternativ $(3/5)^3(2/5)$ vardera. Den sökta sannolikheten är därmed summan av dessa, dvs

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(1 + 3 \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{297}{625}.$$

3. (5p) Du är lärare och ska rätta tentor skriva av de tre studenterna Lisa, Kalle och Emma. Tentorna skrivs förstås under anonym kod, men du känner studenterna och uppskattar att Lisa svarar rätt på en given fråga med sannolikhet 0.8. Motsvarande för Kalle och Emma är 0.65 och 0.5. Detta tror du gäller för samtliga 20 frågor på tentan och oberoende för de olika frågorna. Om du tar en av tentorna på måfå, rättar och ser att den fick 11 poäng, vad är den betingade sannolikheten att tentan är skriven Lisa, Kalle respektive Emma?

Lösning. Låt L, K respektive E vara händelserna att Lisa, Kalle, respektive Emma skrev tentan. Låt X vara antal poäng på tentan. Givet student som skrev tentan är X binomialfördelad med parametrar 20 och p där p är 0.8, 0.65 respektive 0.5. Givet vad p är, ges den betingade sannolikheten att $X = 11$ av $\binom{20}{11} p^{11}(1-p)^9$. Binomialkoefficienten beror inte av p, dvs inte av vilket student som skrev, så vi kan skriva

$$P(X = 11|L) \propto 0.8^{11} 0.2^9,\ P(X = 11|K) \propto 0.65^{11} 0.35^9,\ \mathbb{P}(X = 11|E) \propto 0.5^{20}.$$

Enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(L|X = 11) \propto \mathbb{P}(X = 11|L)\mathbb{P}(L) \propto \mathbb{P}(X = 11|L)$$

där den sista likheten gäller eftersom $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(E)$. Alltså

$$\mathbb{P}(L|X = 11) = \frac{0.8^{11} 0.2^9}{0.8^{11} 0.2^9 + 0.65^{11} 0.35^9 + 0.5^{20}} \approx 0.026,$$

$$\mathbb{P}(K|X = 11) = \frac{0.65^{11} 0.35^9}{0.8^{11} 0.2^9 + 0.65^{11} 0.35^9 + 0.5^{20}} \approx 0.409,$$

$$\mathbb{P}(E|X = 11) = \frac{0.8^{11} 0.2^9}{0.8^{11} 0.2^9 + 0.65^{11} 0.35^9 + 0.5^{20}} \approx 0.565.$$

4. (5p) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variabel som har frekvensfunktionen

$$p_X(j) = C(\theta)\theta^j,\ j = 0, 1, 2.$$

Här är θ en positiv parameter. Bestäm $C(\theta)$ och gör en ML-skattning av θ.

Lösning. För att frekvensfunktionen ska summera till 1, måste

$$C(\theta) = \frac{1}{1 + \theta + \theta^2}.$$

Likelihoodfunktionen blir nu

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_k) = \frac{\theta^{\sum_{k=1}^n x_k}}{(1 + \theta + \theta^2)^n},$$

Skriv $S = \sum x_k$, logaritmera och få

$$\ell(\theta) = S \ln \theta - n \ln(1 + \theta + \theta^2).$$

Derivera och sätt till 0 och få

$$\frac{S}{\theta} - \frac{(1+2\theta)n}{1+\theta+\theta^2} = 0.$$

En omskrivning av detta blir

$$\frac{\theta + 2\theta^2}{1+\theta+\theta^2} = \overline{x}.$$

Denna andragradsekvation har den positiva lösningen

$$\hat{\theta} = \frac{1 - \overline{x} + \sqrt{4 - 3(\overline{x}-1)^2}}{2(2-\overline{x})},$$

utom i fallet $\overline{x} = 2$, då lösningen är $\hat{\theta} = \infty$.

5. (5p) Betrakta vanlig linjär regression på formen

$$y_k = a + bx_k + \epsilon_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Antag att $n = 3$ och $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

(a) Visa att ML-skattningen av b inte beror av y_2.

(b) Om $y_1 = -1$ och $y_3 = 1$, för vilka värden på y_2 kan nollhypotesen $H_0 : b = 0$ förkastas till förmån för $H_A : b > 0$ på 5% signifikansnivå?

Lösning. Det gäller att

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}.$$

Nämnaren beror inte av y överhuvudtaget och täljaren är

$$S_{xy} = \sum_k (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$

och eftersom $x_2 - \overline{x} = 0$ beror inte detta uttryck på y_2.

Det nedåt begränsade konfidensintervallet för b ges av

$$b \geq \hat{b} - F_{t_1}^{-1}(0.95)\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}.$$

Med givna värden på x_k:na är $S_{xx} = 2$ och med $y_1 = -1, y_3 = 1$ får vi också $S_{xy} = 1$ och således $\hat{b} = 1$ och konfidensintervallet blir

$$b \geq 1 - \frac{6.31}{\sqrt{2}} s = 1 - 4.46s.$$

Testet förkastar då konfidensintervallet inte täcker 0, vilket sker då $s < 1/4.46$, dvs $s^2 < 0.0502$. Vi har att $s^2 = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} = S_{yy} - 2$, så frågan är för vilka y_2 som $S_{yy} < 2.0502$. Nu är ju $S_{yy} = \sum y_k^2 - (\sum y_k)/3 = 2 + y_2^2 - y_2^2/3$, så $s^2 < 0.05$ sker då $2y_2^2/3 < 0.05$, dvs då $|y_2| < \sqrt{0.0756} \approx 0.27$.

6. (5p)

(a) Låt X och V vara stokastiska variabler. Visa att

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|V)] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[X|V]).$$

(b) Låt X vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(x-\mu\right) + \Phi\left(\frac{x-3\mu}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Här är μ en reell konstant. Bestäm $\mathbb{E}[X]$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(c) Låt X vara som i (b) och låt vidare $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på X och antag att n är stort. Bestäm approximativt

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq 3\mu\right).$$

Lösning. Del (a):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|V)] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[X|V]) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|V] - \mathbb{E}[X|V]^2] + E[\mathbb{E}[X|V]^2] - \mathbb{E}[E[X|V]]^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|V]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|V]]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = Var(X).\end{aligned}$$

Här följer den näst sista olikheten av dubbla väntevärdesformeln.

Del (b): Vi känner igen F som fördelningsfunktionen för en stokastisk variabel X som uppfyller att $X = Y$ med sannolikhet $1/2$ och $X = Z$ med sannolikhet $1/2$, där $Y \sim N(\mu, 1)$ och $Z \sim N(3\mu, 2)$. Detta kan vi uttrycka genom att låta I vara en indikator oberoende av Y och Z med $\mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(I = 0) = 1/2$ och $X = Y$ om $I = 0$ och $X = Z$ om $I = 1$ Därför gäller $\mathbb{E}[X] = (1/2)\mathbb{E}[X|I = 0] + (1/2)\mathbb{E}[X|I = 1] = 2\mu$.

Eftersom $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|I)$ är en stokastisk variabel som antar värdet 1 då $I = 0$ och värdet 2 då $I = 1$, gäller $\mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|I)] = 3/2$. Vidare är $\mathbb{E}[X|I]$ lika med μ med sannolikhet $1/2$ och 3μ med sannolikhet $1/2$, vilket ger $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[X|I]) = \mu^2$.

Del (c): Vi har nu sett att $\mathbb{E}[X] = 2\mu$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mu^2$. Enligt CGS gäller approximativt att $\overline{X} \sim N(2\mu, \mu^2/n)$, så

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leq 3\mu) \approx \Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2/n}}\right) = \Phi\left(\sqrt{n}\right).$$

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2.

(a) Om $n = 10$ och stickprovsvariansen s^2 visade sig bli 2.44, konstruera ett nedåt begränsat 95% konfidensintervall för σ^2.

(b) Hur stort behöver n vara för att testet $H_0 : \sigma^2 = 1$ mot $H_A : \sigma^2 > 1$ på 5% signifikansnivå ska ha en styrka på minst 95% om det sanna värdet på σ^2 är 7?

Lösning. Vi använder att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Detta ger $\mathbb{P}((n-1)s^2/\sigma^2 \leq a) = 0.95$ då $a = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.95)$. Detta ger det 95%-iga konfidensintervallet

$$\sigma^2 \geq \frac{(n-1)s^2}{a}.$$

I (a) har vi $a = F^{-1}_{\chi^2_9}(0.95) = 19.92$, så vi får

$$\sigma^2 \geq \frac{9 \cdot 2.44}{19.92},$$

dvs

$$\sigma^2 \geq 1.10 \ (95\%).$$

För (b): Nollhypotesen förkastas om det nedåt begränsade konfidensintervallet inte innehåller 1. Konfidensintervallet har vi just sett ha den nedre begränsningen $(n-1)s^2/a$ och vi vill alltså att denna ska överstiga 1 med sannolikhet åtminstone 0.95. Det gäller

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{a} \geq 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{7} \geq \frac{a}{7}\right) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{a}{7}\right).$$

Högersidan ska överstiga 0.95, så $F_{\chi^2_{n-1}}(\frac{a}{7})$ ska vara högst 0.05. Alltså, vi ska hitta det minsta n sådant att

$$F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.95)}{7}\right) \leq 0.05$$

eller, om man vill,

$$F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.95) \leq 7F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.05).$$

Från tabell ser vi att det krävs att $n \geq 8$.

8. (5p) Låt Θ vara en stokastisk variabel som är $\beta(1,2)$-fördelad och låt sedan, givet att $\Theta = \theta$, X vara $\beta(4\theta, 4(1-\theta))$-fördelad. Beräkna

$$\frac{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{3}\right)}{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{5}\middle|\frac{1}{3}\right)}.$$

Lösning.

Allmänt gäller att enligt Bayes formel att

$$\frac{f_{\Theta|X}(\theta_1|x)}{f_{\Theta|X}(\theta_2|x)} = \frac{f_{X|\Theta}(x|\theta_1)f_\Theta(\theta_1)}{f_{X|\Theta}(x|\theta_2)f_\Theta(\theta_2)}$$

eftersom nämnarna $f_X(x)$ i Bayes formel tar ut varandra. I det här fallet blir detta

$$\frac{f_{\Theta|X}(\theta_1|x)}{f_{\Theta|X}(\theta_2|x)} = \frac{\Gamma(4\theta_2)\Gamma(4(1-\theta_2))x^{4\theta_1-1}(1-x)^{4(1-\theta_1)-1}(1-\theta_1)}{\Gamma(4\theta_1)\Gamma(4(1-\theta_1))x^{4\theta_2-1}(1-x)^{4(1-\theta_2)-1}(1-\theta_2)}$$

Detta ger

$$\frac{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{3}\right)}{f_{\Theta|X}\left(\frac{1}{5}\middle|\frac{1}{3}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{4(1/2)-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4(1-1/2)-1}\frac{1}{2}}{\Gamma(2)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{4(1/5)-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4(1-1/5)-1}\frac{4}{5}}$$

$$= \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{6/5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-11/5}\frac{5}{8} \approx 1.15.$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101