Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-06-01 kl. 8:30-12:30.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = cx^2y$, $0 < y < x < 1$. Bestäm konstanten c, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

2. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_{15}$ och $Y_1, \ldots, Y_{12}$ vara två oberoende stickprov på varsin normalfördelning med väntevärdena μ_x respektive μ_y och standardavvikelserna σ_x och σ_y.

(a) Gör ett 95% symmetriskt konfidensintervall för $\mu_y - \mu_x$ under antagandet att det är känt att $\sigma_x = 2$ och $\sigma_y = 1.5$.

(b) Gör ett 95% symmetriskt konfidensintervall för $\mu_y - \mu_x$ med okända standardavvikelser, men under antagandet att $\sigma_x = \sigma_y$.

Data gav att $\sum_{k=1}^{15} X_k = 21.8$, $\sum_{k=1}^{15} X_k^2 = 67.3$, $\sum_{k=1}^{12} Y_k = 29.5$, $\sum_{k=1}^{12} Y_k^2 = 84.4$.

3. (5p) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variabel som har tätheten

$$f(x) = C(\theta)x^\theta(1-x),\ 0 < x < 1,$$

där θ är en parameter sådan att $\theta > -1$. Bestäm $C(\theta)$ och gör en ML-skattning av θ.

4. (5p) Låt först X vara sådan att $P(X = -1) = 1/4$, $P(X = 0) = 1/2$ och $P(X = 2) = 1/4$. Givet $X = x$, låt $Y \sim N(x, 1)$.

(a) Beräkna $P(Y > 2)$.

(b) Beräkna $P(X = k|Y > 2)$ för $k = -1, 0, 2$.

5. (5p) På en viss väg kommer bilar som en Poissonprocess med intensitet 7 bilar per minut och motorcyklar med en intensitet 2 motorcyklar per minut.

(a) Vad är sannolikheten att det under en halv minut passerar högst två fordon?

(b) Vad är sannolikheten att de tre fordon som passerar härnäst alla är bilar?

6. (5p)

(a) Låt X och Y vara oberoende och exponentialfördelade med parametrar λ_1 respektive λ_2. Låt I vara indikatorn för händelsen att $X < Y$ (dvs $I = 1$ om $X < Y$ och $I = 0$ annars). Visa att I och $\min(X, Y)$ är oberoende.

(b) Låt $p \in (0, 1)$ och låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att $X \sim Geo(p)$ och $Y \sim exp(p)$. Beräkna $\mathbb{P}(X < Y)$.

7. (5p) Den stokastiska variabeln X kan anta värdena 0 och 1 och för dess momentgenererande funktion M_X gäller att $M_X(2) = 2$. Vad är $\mathbb{P}(X = 1)$?

8. (5p) En stokastisk variabel sägs vara Paretofördelad med parametrar α och M om den har tätheten

$$f(x) = \frac{\alpha M^\alpha}{x^{\alpha+1}},\ x > M.$$

Välj nu först en parameter θ enligt en priorfördelning som är Pareto med dessa parametrar. Välj sedan ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på den likformiga fördelningen på $[0, \theta]$. Vad är posteriorfördelningen för θ givet $X_1, \ldots, X_n$?

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101

Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2022-06-01 kl. 8:30-12:30.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, Beta, maximalt två blad (dvs fyra A4-sidor) handskriva anteckningar.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

1. (5p) Låt den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) ha täthet $f(x, y) = cx^2y$, $0 < y < x < 1$. Bestäm konstanten c, väntevärdena för X och Y och kovariansen för (X, Y).

Lösning. En täthet måste integreras till 1 och

$$\int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx = \frac{1}{10}$$

så $c = 10$ och $f(x, y) = 10x^2y$,$0 < y < x < 1$. Det gäller att

$$\mathbb{E}[X] = \int\int x f(x, y) dy \, dx = 10 \int_0^1 \int_0^x x^3 y \, dy \, dx = \frac{5}{6}$$

och

$$\mathbb{E}[Y] = \int\int y f(x, y) dy \, dx = 10 \int_0^1 \int_0^x x^2 y^2 \, dy \, dx = \frac{5}{9}.$$

Vidare gäller

$$\mathbb{E}[XY] = \int\int xy f(x, y) dy \, dx = 10 \int_0^1 \int_0^x x^3 y^2 \, dy \, dx = \frac{10}{21}.$$

Därför är

$$\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{10}{21} - \frac{5}{6}\frac{5}{9} = \frac{5}{378}.$$

2. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_{15}$ och $Y_1, \ldots, Y_{12}$ vara två oberoende stickprov på varsin normalfördelning med väntevärdena μ_x respektive μ_y och standardavvikelserna σ_x och σ_y.

(a) Gör ett 95% symmetriskt konfidensintervall för $\mu_y - \mu_x$ under antagandet att det är känt att $\sigma_x = 2$ och $\sigma_y = 1.5$.

(b) Gör ett 95% symmetriskt konfidensintervall för $\mu_y - \mu_x$ med okända standardavvikelser, men under antagandet att $\sigma_x = \sigma_y$.

Data gav att $\sum_{k=1}^{15} X_k = 21.8$, $\sum_{k=1}^{15} X_k^2 = 67.3$, $\sum_{k=1}^{12} Y_k = 29.5$, $\sum_{k=1}^{12} Y_k^2 = 84.4$.

Lösning. I (a) är konfidensintervallet

$${}_y - \mu_x = \overline{Y} - \overline{X} \pm \Phi^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{2^2}{15} + \frac{1.5^2}{12}} = 1.00 \pm 1.32.$$

I (b) är konfidensintervallet

$$_y - \mu_x = \overline{Y} - \overline{X} \pm F_{t_{25}}^{-1}(0.975) s_P \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}} = 1.00 \pm 1.10.$$

För att får s_P, kom ihåg att $(n-1)s_x^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n$ och analogt för y och att $s_P^2 = ((n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2)/(n+m-2)$.

3. (5p) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variabel som har tätheten

$$f(x) = C(\theta) x^\theta (1-x),\ 0 < x < 1,$$

där θ är en parameter som uppfyller $\theta > -1$. Bestäm $C(\theta)$ och gör en ML-skattning av θ.

Lösning. Först gäller att faktorn $C(\theta)$ ska göra att tätheten integreras till 1, vilket ger

$$C(\theta) = \frac{1}{\int_0^1 x^\theta (1-x) dx} = (\theta+1)(\theta+2).$$

Detta ger att

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^n \Big((\theta+1)(\theta+2) x_k^\theta (1-x)\Big)$$

så

$$\ell(\theta) = n(\ln(\theta+1) + \ln(\theta+2) + \ln(1-x)) + \theta \sum \ln x_k.$$

Derivera detta m.a.p. θ och sätt till 0 och få ekvationen

$$n\left(\frac{1}{\theta+1} + \frac{1}{\theta+2}\right) + \sum \ln x_k = 0.$$

Denna ekvation har två lösningar, men bara den ena är större än -1, nämligen

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^n \ln x_k}\right)^2} - \frac{n}{\sum_{k=1}^n \ln x_k} - \frac{3}{2}.$$

4. (5p) Låt först X vara sådan att $P(X=-1) = 1/4$, $P(X=0) = 1/2$ och $P(X=2) = 1/4$. Givet $X = x$, låt $Y \sim N(x, 1)$.

(a) Beräkna $P(Y > 2)$.

(b) Beräkna $P(X = k | Y > 2)$ för $k = -1, 0, 2$.

Lösning. Det gäller att $P(Y > 2 | X = -1) = P(Y + 1 > 3 | X = -1) = 1 - \Phi(3)$ där den sista likheten följer av att $Y + 1 \sim N(0,1)$ då $X = -1$. På samma sätt gäller $P(Y > 2 | X = 0) = 1 - \Phi(2)$ och $P(Y > 2 | X = 2) = \Phi(0) = 1/2$. Enligt totala sannolikhetslagen gäller alltså

$$P(Y > 2) = \frac{1}{4}(1 - \Phi(3)) + \frac{1}{2}(1 - \Phi(2)) + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{1}{4}\Phi(3) - \frac{1}{2}\Phi(2).$$

Vidare gäller enligt Bayes formel att

$$P(X = k | Y > 2) = \frac{P(Y > 2 | X = k) P(X = k)}{P(Y > 2)}.$$

Nämnare är redan uträknad och täljarna är termerna i totala sannolikhetslagen, så vi får

$$P(X = -1 | Y > 2) = \frac{1 - \Phi(3)}{4(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\Phi(3) - \frac{1}{2}\Phi(2))} = \frac{2(1 - \phi(3))}{7 - 2\Phi(3) - 4\Phi(2)},$$

$$P(X = 0 | Y > 2) = \frac{1 - \Phi(2)}{2(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\Phi(3) - \frac{1}{2}\Phi(2))} == \frac{4(1 - \Phi(2))}{7 - 2\Phi(3) - 4\Phi(2)},$$

$$P(X = 2 | Y > 2) = \frac{1}{2(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\Phi(3) - \frac{1}{2}\Phi(2))} = \frac{4}{7 - 2\Phi(3) - 4\Phi(2)}.$$

5. (5p) På en viss väg kommer bilar som en Poissonprocess med intensitet 7 bilar per minut och motorcyklar med en intensitet 2 motorcyklar per minut.

(a) Vad är sannolikheten att det under en halv minut passerar högst två fordon?

(b) Vad är sannolikheten att de tre fordon som passerar härnäst alla är bilar?

Lösning. (a) Fordonen som passerar, $X(t)$, utgör en sammanvägd Poissonprocess med intesitiet 9. Detta betyder att $X(1/2) \sim Poi(9/2)$ och därmed

$$P(X \leq 2) = e^{-9/2}\left(1 + \frac{9}{2} + \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{2}\right) \approx 0.174.$$

(b) Låt T_b vara tiden till näsat bil och T_m tiden till nästa MC. Dessa är oberoende och $exp(7)$- respektive $exp(2)$-fördelade. Det betyder att

$$\begin{aligned} P(T_b > T_m) &= \int_0^\infty P(T_b < T_m | T_m = x) f_{T_m}(x)dx \\ &= 2\int_0^\infty e^{-7x}e^{-2x}dx = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Alltså gäller $P(T_b < T_m) = 7/9$ och tack vare exponentialfördelningens glömskeegenskap gäller att sannolikheten att det tre nästföljande fordonen är bilar $(7/9)^3$.

6. (5p)

(a) Låt X och Y vara oberoende och exponentialfördelade med parametrar λ_1 respektive λ_2. Låt I vara indikatorn för händelsen att $X < Y$ (dvs $I = 1$ om $X < Y$ och $I = 0$ annars). Visa att I och $\min(X, Y)$ är oberoende.

(b) Låt $p \in (0, 1)$ och låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att $X \sim Geo(p)$ och $Y \sim exp(p)$. Beräkna $\mathbb{P}(X < Y)$.

(a) Skriv $M = \min(X, T)$. Det räcker att visa att det gäller för alla $t > 0$ att $P(M > t | Y > X) = P(M > t)$, ty genom att derivera ser vi då att $f_{M|Y>X} = f_M$. Vidare är $P(M > t|Y > X) = P(M > t)$ ekvivalent med $P(M > t, Y > X) = P(M > t)P(Y > X)$. Det gäller att

$$\begin{aligned} P(M > t, Y > X) = P(Y > X > t) &= \int_t^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} P(Y > s)ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 s} ds \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$

Den andra faktorn är $P(M > t)$. Den första faktorn är $P(Y > X)$, ty

$$P(Y > X) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 s} ds = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

(b):

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= \sum_{k=1}^\infty P(Y > X | X = k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} e^{-pk} = p\, e^{-p} \sum_{j=0}^\infty ((1-p)e^{-p})^j \\ &= \frac{p\, e^{-p}}{1 - (1-p)e^{-p}} = \frac{p}{e^p + p - 1}. \end{aligned}$$

7. (5p) Den stokastiska variabeln X kan anta värdena 0 och 1 och för dess momentgenererande funktion M_X gäller att $M_X(2) = 2$. Vad är $\mathbb{P}(X = 1)$?.

Lösning.

Skriv $p = P(X = 1)$. Det gäller att $M_X(2) = E[e^{2X}] = 1 - p + pe^2 = 2$. Den ekvationen har lösningen

$$p = \frac{1}{e^2 - 1}.$$

8. (5p) En stokastisk variabel sägs vara Paretofördelad med parametrar α och M om den har tätheten

$$f(x) = \frac{\alpha M^\alpha}{x^{\alpha+1}},\ x > M.$$

Välj nu först en parameter θ enligt en priorfördelning som är Pareto med dessa parametrar. Välj sedan ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på den likformiga fördelningen på $[0, \theta]$. Vad är posteriorfördelningen för θ givet $X_1, \ldots, X_n$?

Lösning. Skriv $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Det gäller att

$$\begin{aligned} f_{\theta|X}(t|x_1, \ldots, x_n) &\propto f_\theta(t) f_{X|\theta}(x_1, \ldots, x_n|t) \\ &\propto \frac{1}{t^{\alpha+1}} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{t^{\alpha+n+1}} \end{aligned}$$

där denna täthet gäller för $t > \max(M, x_1, \ldots, x_k)$ och är 0 annars. Detta ser vi är en Paretofördelning med parametrar $\alpha + n$ och $\max(M, x_1, \ldots, x_n)$. Posterior är alltså $\text{Pareto}(\alpha + n, \max(M, x_1, \ldots, x_n))$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

s	97.5 % percentile								
	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101