Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2020-08-18 kl. 8:30-12:30 plus tid för uppladdning av lösningar 12:30-13:00. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta.

1. (5p) Låt paret (X, Y) av stokastiska variabler ha bivariat täthetsfunktion $f(x, y) = c(x + 2y)$, $0 \leq y \leq x \leq 1$. Beräkna c och sedan väntevärdena och varianserna för X och Y och kovariansen $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

Lösning. Eftersom $\int_0^1 \int_0^x (x+2y)dy\,dx = 2/3$ gäller att $c = 3/2$. Väntevärdet av X ges av

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x x(x+2y)dy\,dx = \frac{3}{4}.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x y(x+2y)dy\,dx = \frac{7}{16}.$$

Vi har också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x x^2(x+2y)dy\,dx = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x y^2(x+2y)dy\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x xy(x+2y)dy\,dx = \frac{7}{20}.$$

Därmed är

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80},$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{1}{4} - \frac{49}{256} = \frac{15}{256},$$

och

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{7}{20} - \frac{3}{4}\frac{7}{16} = \frac{7}{320}.$$

2. (5p) Betrakta linjär regression

$$Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$$

med data $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ där n är udda och $x_k = k$. Låt $m = (n+1)/2$. Visa att om y_m byts ut mot y'_m där $y'_m > y_m$, så resulterar detta i att ML-skattningen $\hat{b}$ av b inte förändras medan $\hat{a}$ växer.

Gör sedan ett symmetriskt konfidensintervall för b med 95 % konfidensgrad för data $(1, 1.7)$, $(2, 1.8)$, $(3, 4.5)$.

Lösning. Det gäller att $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx}$, så om vi kan visa att $S_{xy} = \sum_k (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$ lämnas oförändrad av att ändra y_m så är första delen klar. Detta i sin tur följer av att $x_m = \overline{x} = m$, så $x_m - \overline{x} = 0$. Därefter observerar vi att $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$. Den första termen växer vilket y_k man än ökar. Eftersom den andra termen inte ändras när man ändrar y_m så är saken klar. Konfidensintervallet ges av

$$b = \hat{b} \pm F_{t_1}^{-1}(0.975)\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}.$$

Nu är ju $S_{xx} = 2$, $s^2 = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} = 1.13$ och $F_{t_1}^{-1}(0.975) = 12.7$, så detta blir

$$b = 1.4 \pm 12.7\sqrt{\frac{1.13}{2}} = 1.4 \pm 9.5.$$

3. (5p) I en butik kan du välja en av två köer: kö A och kö B. Du vet att tiden för att betjäna en kund är exponentialfördelad med parameter 2 kunder per minut i kö A och parameter 3 i kö B. Tiderna för olika kunder är oberoende.

(a) Vad är sannolikheten att en kund i kö A betjänas snabbare än en kund i kö B?

(b) Om du finner att det är tre kunder i kassa A och två kunder i kassa B, vilken kö ska du välja för att maximera sannolikheten att du valt den kö där du kommer fram snabbast?

Lösning. Skriv X för betäningstiden för en kund i kö A och Y för betjäningstiden i kö B. I (a) söker vi

$$\mathbb{P}(Y > X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > X | X = x) f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{-3x} 2e^{-2x} dx = \frac{2}{5}.$$

För del (b) observerar vi att enligt glömskegenskapen är läget efter varje avslutad betjäning precis som vid början. Processen blir alltså som en slantsninglingsföljd för en slant som säger A med sannolikhet $2/5$ och B med sannolikhet $3/5$ och för att kö B ska vara snabbast krävs att minst tre av de nästkommande fyra kasten säger B. Vi får alltså

$$\mathbb{P}(\text{Kö B går snabbast}) = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{297}{625}.$$

Man ska alltså välja kö A.

4. (5p) En stokastisk variabel har täthetsfunktion $C(\theta)e^{-\theta|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, där θ är en positiv parameter. Bestäm först $C(\theta)$ och gör sedan en ML-skattning av θ baserat på ett stickprov $x_1, \ldots, x_n$ på X.

Lösning. För att beräkna $C(\theta)$ beräknar vi

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\theta|x|}dx = 2\int_0^\infty e^{-\theta x} dx = \frac{2}{\theta}.$$

Det följer att $C(\theta) = \theta/2$. Likelihooden blir då

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{\theta^n}{2^n} e^{-\sum_k \theta|x_k|}.$$

Logaritmera och få

$$\ell(\theta; x_1, \ldots, x_n) = n \ln\theta - n\ln 2 - \theta\sum_k x_k.$$

Derivera och sätt lika med noll:

$$\frac{n}{\theta} - \sum_k |x_k| = 0$$

vilket ger skattningen

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_k |x_k|}.$$

5. (5p) Betrakta två mynt: mynt A som ger klave med sannolikhet 1/3 och mynt B som ger klave med sannolikhet 2/3. Låt $p \in (0,1)$ och välj ett mynt slumpmässigt så att mynt A väljs med sannolikhet p och B med sannolikhet $1-p$ och slingla det valda myntet n gånger. Om detta resulterar i klave k gånger, vad är det betingade sannolikheten att mynt A valdes? Vad är det högsta värdet på k sådant att den betingade sannolikheten för mynt A överstiger 1/2?

Lösning. Låt A vara händelsen att mynt A valdes och analog definition för händelsen B. Låt X vara antal klave. Enligt Bayes formel är

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|X=k) &= \frac{\mathbb{P}(X=k|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X=k|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X=k|B)\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{p\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}}{p\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + (1-p)\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}} \\
&= \frac{p}{p+(1-p)2^{2k-n}}.
\end{aligned}$$

Detta uttryck understiger 1/2 då $p \geq (1-p)2^{2k-n}$, dvs då

$$k \geq \frac{1}{2}\left(n + \log_2 \frac{1-p}{p}\right).$$

6. (5p) Vi har två mynt, A och B, som ger klave med sannolikhet p_A respektive p_B. Mynt A singlades 100 gånger och gav klave 73 gånger. Mynt B singlades 150 gånger och gav klave 83 gånger.

(a) Gör ett symmetriskt konfidensintervall för $p_A - p_B$ av approximativ konfidensgrad 95%.

(b) Gör ett nedåt begränsat konfidensintervall för p_A av konfidensgrad 99%.

7. (5p) Beräkna momentgenererande funktion till en stokastisk variabel som är likformig fördelad på $(-1,1)$. Låt sedan $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende och $likf(-1,1)$-fördelade och visa att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{3}\,S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

för alla $x \in \mathbb{R}$, där $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Lösning. Låt $X \sim (-1,1)$. Det gäller att

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{tx}dx = \frac{1}{2t}(e^t - e^{-t}).$$

Därmed är

$$M_{S_n}(t) = \frac{1}{(2t)^n}(e^t - e^{-t})^n$$

varför

$$M_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \frac{1}{(2t/\sqrt{n})^n}(e^{t/\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}})^n.$$

Enligt Taylors formel är

$$\begin{aligned} e^{t/\sqrt{n}} - e^{-t/\sqrt{n}} &= \frac{2t}{\sqrt{n}} + \frac{t^3}{3n^{3/2}} + \frac{c(t)}{n^{5/2}} \\ &= \frac{2t}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{t^2}{6n} + \frac{c(t)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Detta ger

$$M_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{6n} + \frac{c(t)}{n^2}\right)^n \to e^{t^2/6}.$$

Till sist konstaterar vi att detta innebär att

$$M_{\sqrt{3}S_n/\sqrt{n}}(t) \to e^{t^2/2}.$$

Högerledet är mgf för standardnormalfördelingen och därmed är det önskade resultatet visat.

8. (5p) Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende och likformigt fördelade på $(0,1)$. Skriv $X_{(i)}$ för den i:te minsta av dessa.

(a) Bestäm den bivariata täthetsfunktionen för $(X_{(1)}, X_{(2)})$.

(b) Bestäm täthetsfunktionen för $X_{(2)}$.

Lösning. Skriv för enkelhets skull $X = X_{(1)}$, $Y = X_{(2)}$, $Z = X_{(3)}$. Fördelningen för (X, Y, Z) är densamma som för (X_1, X_2, X_3) betingat på $X_1 < X_2 < X_3$. Den trivariata tätheten är 1 på enhetskuben och vi betingar på ett område som rymmer $1/6$ av volymen av enhetskuben och vi får alltså att den trivariata tätheten för (X, Y, Z) är $f(x, y, z) = 6$, $0 < x < y < z < 1$. Då får vi

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_y^1 dz = 1 - y,\ 0 < x < y < 1.$$

För del (b),

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X_{(2)} \leq y) = \mathbb{P}(\text{minst två av } X_1, X_2, X_3 \text{ understiger } y) = y^3 + 3y^2(1-y) = 3y^2 - 2y^3.$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101