Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2020-06-03 kl. 8:30-12:30 plus tid för uppladdning av lösningar 12:30-13:00. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta.

1. (6p) Antag att paret (X, Y) av stokastiska variabler har bivariat täthetsfunktion

$$f(x,y) = 4e^{-2x},\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < x.$$

(Var uppmärksam på restriktionerna $0 < x < \infty$ och $0 < y < x$; dessa är avgörande för resultaten.) Bestäm marginaltätheterna, väntevärdena och varianserna för X och Y och bestäm $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

Lösning: Marginaltätheterna är

$$f_X(x) = \int_0^x 4e^{-2x}dy = 4xe^{-2x}$$

för $0 < x < \infty$ och

$$f_Y(y) = \int_y^\infty 4e^{-2x}dx = 2e^{-2y}$$

för $0 < y < \infty$. Här ser vi att $Y \sim exp(2)$, vilket ger att $\mathbb{E}[Y] = 1/2$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 1/4$. Vidare är

$$\mathbb{E}[X] = 4\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx = 1.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[X^2] = 4\int_0^\infty x^3e^{-2x}dx = \frac{3}{2},$$

vilket då ger att

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{2}.$$

Det gäller att

$$\mathbb{E}[XY] = 4\int_0^\infty \int_0^x xye^{-2x}dx = \frac{3}{4},$$

vilket avslutningsvis ger

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4}.$$

2. (4p) Antag att X är en stokastisk variabel som har täthet $f(x) = C(\theta)x(\theta - x)$, $0 < x < \theta$, där θ är en positiv parameter.

(a) Bestäm $C(\theta)$.

(b) Antag att $X_1, \dots, X_n$ är ett stickprov på X och visa att ML-skattningen av θ är den största lösningen till ekvationen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\theta}{\theta - x_k} = 3n.$$

Lösning: Det gäller att $\int_0^\theta x(\theta - x) = \theta^3/6$, så $C(\theta) = 6/\theta^3$ och tätheten är därmed

$$f(x) = \frac{6}{\theta^3} x(\theta - x).$$

Därför är ML-skattningen maximum av

$$\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = -3n \ln \theta + \sum_{k=1}^{n} (\ln x_k + \ln(\theta - x_k)).$$

Derivera och sätt till 0 och få följande ekvation att lösa

$$-\frac{3n}{\theta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta - x_k}$$

vilket efter förlängning med θ ger den önskade ekvationen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\theta}{\theta - x_k} = 3n.$$

Eftersom det måste gälla att $x_k \le \theta$ för alla k är det bara lösningar $\theta > \max_k x_k$ som är intressanta. Eftersom högerledet i ekvationen är avtagande i θ för $\theta > \max_k x_k$ kan det bara finnas högst en sådan lösning. Att det existerar en lösning ser vi av att vänsterledet går mot ∞ då $\theta \to \max_k x_k$ och mot n då $\theta \to \infty$.

3. (5p) Tre oberoende Poissonprocesser, A, B och C, har intensitet 5, 3 resp 2 impulser/timme.

(a) Vad är sannolikheten att det under en kvart inte kommer några impulser alls?

(b) Vad är sannolikheten att det under en timme kommer minst 3 C-impulser?

(c) Vad är den betingade sannolikheten att det kommer k, $k = 0, \dots, 7$, B-impulser under de första två timmarna, givet att det totalt kom 7 impulser?

Lösning: Den totala mängden impulser är en sammanvägd Poissonprocess som har intensitet $5+3+2 = 10$ impulser per timme. Det betyder att om X_t får stå för det totala antalet impulser på en kvart så gäller att $X_t \sim Poi(5/2)$ och därför blir $\mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-5/2} \approx 0.082$.

Antalet impulser i C under en timme, X_c, är $Poi(2)$-fördelad, så

$$\mathbb{P}(X_c \ge 3) = 1 - \mathbb{P}(X_c \le 2) = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!}\right) = 1 - 5e^{-2} \approx 0.32.$$

I (c) efterfrågas den betingade fördelningen för X givet att $X + Y = 7$, där X och Y är oberoende, $X \sim Poi(6)$ och $Y \sim Poi(14)$. Här är X antal B-impulser och Y antal impulser som inte kommer från B. Vi har

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = 7) = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = 7 - k)}{\mathbb{P}(X + Y = 7)} = \frac{e^{-6}\frac{6^k}{k!} e^{-14}\frac{14^{7-k}}{(7-k)!}}{e^{-20}\frac{20^7}{7!}}$$

där den andra olikheten utnyttjar att X och Y är oberoende. Många saker kan förkortas bort och kvar blir

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = 7) = \frac{7!\, 6^k 14^{7-k}}{k!(7-k)!\, 20^7} = \binom{7}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{7-k},$$

dvs den betingade fördelningen för X givet att $X + Y = 7$ är $Bin(7, 3/10)$.

4. (5p) Slå två fyrsidiga tärningar och välj sedan Z enligt $\mathbb{P}(Z = z|S = s) = 1/s$, $z = 1, \ldots, s$, där $S = X + Y$ och X och Y är respektive resultat för de två tärningarna.

(a) Vad är $\mathbb{E}[Z]$?

(b) Vad är den betingade fördelningen för S givet att $Z = 7$ (dvs vad är $\mathbb{P}(S = s|Z = 7)$, för $s = 2, 3, \ldots, 8$)?

(c) Vad är den betingade fördelningen för X givet att $Z = 7$ (dvs vad är $\mathbb{P}(X = x|Z = 7)$, för $x = 1, \ldots, 4$)?

Lösning: Det gäller att $\mathbb{P}(S = s) = (4 - |5 - s|)/16$, $s = 2, 3, \ldots, 8$. Av symmetrin följer att $\mathbb{E}[S] = 5$. Därför är

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|S]] = \mathbb{E}\left[\frac{S+1}{2}\right] = 3.$$

För (b): Det är uppenbart att $\mathbb{P}(S = s|Z = 7) = 0$ för $s \leq 6$. I övrigt gäller enligt Bayes formel att

$$\mathbb{P}(S = s|Z = 7) = \frac{\mathbb{P}(Z = 7|S = s)\mathbb{P}(S = s)}{\mathbb{P}(Z = 7)} \propto \frac{1}{s}\frac{4 - |5 - s|}{16} \propto \frac{4 - |5 - s|}{s}.$$

Här står proportionalitetstecknen för att vi strukit konstanter som inte beror på s. (Dessa fungerar ju bara som konstanter som gör att summan av de sannolikheter vi försöker beräkna summerar sig till 1. Detta kan vi justera i efterhand.)

Högerledet är $2/7$ för $s = 7$ och $1/8$ för $s = 8$. Efter normering av dessa till 1, följer att $\mathbb{P}(S = s|Z = 7) = 16/23$ och $\mathbb{P}(S = 8|Z = 7) = 7/23$.

För (c) gäller analogt $\mathbb{P}(X = x|Z = 7) \propto \mathbb{P}(Z = 7|X = x)\mathbb{P}(X = x)$ och $\mathbb{P}(X = x)$ är konstant och därmed inte beror av x, varför detta förenklas till $\mathbb{P}(X = x|Z = 7) \propto \mathbb{P}(Z = 7|X = x)$. Nu ger totala sannolikhetslagen att

$$\mathbb{P}(Z = 7|X = 3) = \sum_{y=1}^{4} \mathbb{P}(Z = 7|X = 3, Y = y)\mathbb{P}(Y = y|X = x) \propto \sum_{y=1}^{4} \mathbb{P}(Z = 7|X = 3, Y = y)$$

eftersom $\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbb{P}(Y = y) = 1/4$, som inte beror av x. Detta ger $\mathbb{P}(Z = 7|X = 3) \propto 0 + 0 + 0 + 1/7$ och $\mathbb{P}(Z = 7|X = 4) \propto 0 + 0 + 1/7 + 1/8$, så $\mathbb{P}(X = 3|Z = 7) = (1/7)/(2/7 + 1/8) = 8/23$, $\mathbb{P}(X = 4|Z = 7) = 15/23$ och $\mathbb{P}(X = x|Z = 7) =$ för $x = 1, 2$.

5. (5p) I den linjära regressionsmodellen $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$, där $\epsilon_k \sim N(0, \sigma^2)$ med observationerna $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, där värdena på kovariaten är storleksordnade så att $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, betrakta ML-skattningarna $\hat{a}$ och $\hat{b}$ av a och b. Visa att $\hat{a}$ är växande och $\hat{b}$ är avtagande i y_1 (dvs om y_1 ersätts av $y_1' > y_1$ så ökar $\hat{a}$ medan $\hat{b}$ minskar).

Antag sedan att σ är känd och att ett symmetriskt konfidensintervall för b bildas. Visa att längden av konfidensintervallet inte beror av y:na. Gör nu också ett symmetriskt prediktionsintervall för en ny observation Y för värdet x på kovariaten. Visa att ju större $|x - \overline{x}|$, desto längre prediktionsintervall.

Lösning: Det gäller att $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx}$ och för att visa att $\hat{b}$ är avtagande i y_1 räcker det alltså att visa att $\partial S_{xy}/\partial y_1 < 0$. Nu är ju $S_{xy} = \sum x_k y_k - n\overline{x}\overline{y}$, vilket ger

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial y_1} = x_1 - \overline{x} < 0,$$

där den sista olikheten följer av att x_1 är det minsta av x-värdena.

Nu är ju $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$ och den första termen är uppenbart växande i y_1 och av vad som nyss visades är även den andra termen växande.

För att göra konfidensintervall för b utnyttjas att $\hat{b} \sim N(b, \sigma^2/S_{xx})$. Detta ger ett konfidensintervall

$$b = \hat{b} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$$

där z är en fraktil i standardnormalfördelningen vald för önskad konfidensgrad. Här ser vi direkt att den andra termen inte beror av y:na och eftersom längden av konfidensintervallet är två ggr denna term så är saken klar.

Prediktionsintervallet är

$$Y = \hat{a} + \hat{b}x \pm z\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{x})^2}{S_{xx}}}$$

och det räcker att observera att den andra termen uppenbart är växande i $|x - \overline{x}|$.

6. (5p) Låt $X_1, \dots, X_8$ vara ett stickprov på en $N(\mu_x, \sigma_x^2)$-fördelning och låt $Y_1, \dots, Y_{10}$ vara ett stickprov, oberoende av X_k:na, på en $N(\mu_y, \sigma_y^2)$-fördelning. Data gav att $\overline{x} = 3.7$, $\overline{y} = 2.7$ och att stickprovsstandardavvikelserna för X-stickprovet och Y-stickprovet var 0.83 respektive 1.12.

(a) Antag att det är känt att $\sigma_x = 0.8$ och $\sigma_y = 1.2$. Gör ett test av $H_0 : \mu_x = \mu_y$ och 2% signifikansnivå.

(b) Antag att σ_x och σ_y är okända, men att vi kan anta att de är lika. Gör ett symmetriskt konfidensintervall av konfidensgrad 99% för $\mu_x - \mu_y$.

Lösning: Att göra ett test på 2% signifikansnivå är i den här situationen ekvivalent med att göra ett symmetriskt konfidensintervall med konfidensgrad 98% för $\mu_x - \mu_y$ och se om det täcker 0. Konfidensintervallet baseras på att $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2/8 + \sigma_y^2/10)$ och konfidensintervallet blir därför

$$\mu_x - \mu_y = \overline{X} - \overline{Y} \pm z_{0.99}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{8} + \frac{\sigma_y^2}{10}}.$$

Med de givna siffrorna blir detta

$$\mu_x - \mu_y = 1.0 \pm 2.33\sqrt{\frac{0.8^2}{8} + \frac{1.2^2}{10}} = 1.0 \pm 1.10.$$

Vi kan alltså inte förkasta H_0 på 2% signifikansnivå.

Med okända men lika varianser är konfidensintervallet

$$\mu_x - \mu_y = \overline{X} - \overline{Y} \pm F_{t_{16}}^{-1}(0.995)s_P\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}.$$

Här är

$$s_P^2 = \frac{7s_x^2 + 9s_y^2}{16} = 1.01$$

så

$$\mu_x - \mu_y = 1.0 \pm 2.92\sqrt{1.01}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} = 1.0 \pm 1.39.$$

7. (5p) Låt först θ, ϕ_1 och ϕ_2 vara oberoende och alla ha priorfördelning $\beta(1, 1)$. Sedan, betingat med de valda värdena på θ, ϕ_1, ϕ_2, välj $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ oberoende så att $\mathbb{P}(Z_k = 1|\theta) = 1 - \mathbb{P}(Z = 2|\theta) = \theta$ och därefter, betingat på Z, välj $W = (W_1, \dots, W_n)$ oberoende så att $\mathbb{P}(W_k = 1|Z, \phi_1, \phi_2) = 1 - \mathbb{P}(W_k = 2|Z, \phi_1, \phi_2) = \phi_{Z_k}$.

(a) Vad är posteriorfördelningen för θ om $Z_k = 1$ för alla k?

(b) Vad är posteriorfördelningen för Z om $W_k = 1$ för alla k? Med andra ord, vad är $\mathbb{P}(Z = z|W = (1, 1, \ldots, 1))$, $z \in \{1, 2\}^n$?

I (b) är det tillåtet att ange fördelningen sånär som på en proportionalitetskonstant. Hjälpinformation: $\int_0^1 x^j(1-x)^{n-j}dx = 1/((n+1)\binom{n}{j})$.

Lösning: Enligt Bayes formel gäller

$$f_{\theta|Z}(t|1, \ldots, 1) \propto f_{Z|\theta}(1, \ldots, 1|t) f_\theta(t) = t^n$$

eftersom $f_\theta(t) = 1$ ty $\beta(1, 1)$-fördelningen är helt enkelt likformig fördelning på $(0, 1)$. Högerledet känner vi igen som tätheten för $\beta(n + 1, 1)$-fördelningen sånär som på en proportionalitetskonstant som behövs för att tätheten ska integrera sig till 1. Svaret är alltså att den sökta posteriorfördelningen är $\beta(n + 1, 1)$.

För del (b) använder vi Bayes formel igen och får

$$\mathbb{P}(Z = z|W = w) \propto \mathbb{P}(W = w|Z = z)\mathbb{P}(Z = z)$$

Enligt totala sannolikhetslagen för väntevärden och med $w = (1, \ldots, 1)$ och med $n_1(z)$ som beteckning för antalet k med $z_k = 1$, får vi

$$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Z = z|\theta)] = \mathbb{E}[\theta^{n_1(z)}(1-\theta)^{n-n_1(z)}] \propto \frac{1}{\binom{n}{n_1(z)}}$$

(enligt hjälpinformationen) och

$$\mathbb{P}(W = w|Z = z) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(W = w|Z = z, \phi_1, \phi_2)] = \mathbb{E}[\phi_1^{n_1(z)}\phi_2^{n-n_1(z)}] = \frac{1}{(n_1(z)+1)(n-n_1(z)+1)},$$

där den sista likheten utnyttjar att ϕ_1 och ϕ_2 är oberoende. Genom att ta produkten ser vi att

$$\mathbb{P}(Z = z|W = (1, \ldots, 1)) = \frac{C}{(n_1(z)+1)(n-n_1(z)+1)\binom{n}{n_1(z)}}$$

för en normaliseringskonstant C.

8. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_7$ vara ett stickprov på en $N(\mu, \sigma^2)$-fördelning. Betrakta nu de två statistikerna Kalle och Lisa som ska göra varsitt symmetriskt konfidensintervall för μ med konfidensgrad 95%. Kalle har fått förmånen att känna till värdet på σ^2, medan Lisa inte fått den informationen. Vad är sannolikheten att Lisas konfidensintervall ändå blir kortare än Kalles?

Om Kalle passar på att göra ett test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu \neq 0$ på 5% signifikansnivå, vad blir styrkan för hans test om det sanna värdet på μ är 0.6 och $\sigma = 1$?

Lösning: Kalles konfidensintervall blir

$$\mu = \overline{x} \pm 1.96\sigma/\sqrt{7}$$

medan Lisa får

$$\mu = \overline{x} \pm 2.45s/\sqrt{7}$$

(ty 2.45 är 0.975-fraktilen i t_6-fördelningen). Lisa får alltså ett kortare intervall om $2.45s < 1.96\sigma$, dvs om $s^2/\sigma^2 < (1.96^2/2.45)^2 = 0.64$, dvs om $6s^2/\sigma^2 < 3.84$. Nu är ju $6s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_6$, så sannolikheten att denna understiger 3.84 kan vi slå upp och få till 0.30 avrundat till två decimaler.

Kalle förkastar (eftersom $\sigma = 1$) H_0 om $|\overline{X}| > 1.96/\sqrt{7}$. Med $\mu = 0.6$ är $\overline{X} \sim N(0.6, 1/\sqrt{7})$. Därmed blir

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \frac{1.96}{\sqrt{7}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{1.96}{\sqrt{7}} - 0.6}{\frac{1}{\sqrt{7}}}\right) = 1 - \Phi(0.373) = 0.359.$$

Vi har också

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} < -\frac{1.96}{\sqrt{7}}\right) = \Phi\left(\frac{-\frac{1.96}{\sqrt{7}} - 0.6}{\frac{1}{\sqrt{7}}}\right) = \Phi(-3.55) = 0.0002.$$

Sannolikheten att förkasta H_0 är summan av dessa, dvs 0.359. Med andra ord: den sökta styrkan är 0.359.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101