Dugga
MVE302/MVE395/TMA321 Sannolikhet och statistik/Sannolikhet, statistik och risk/Matematisk statistik

2021-05-03 kl. 18:00-20:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att ladda upp i Canvas senast kl 20:00 i pdf. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk. Allt som inte innebär att ta hjälp av någon annan människa i realtid är tillåtet.

---

1. (4p) Den bivariata stokastiska variabeln (X, Y) är kontinuerlig och har bivariat täthetsfunktion

$$f(x,y) = 2xye^{-(1+y^2)x},\ x, y \geq 0.$$

Beräkna marginaltätheterna, väntevärdena och varianserna för X och Y. Tips: Du kan bespara dig en del arbete genom att använda symbolmanipulerande mjukvara.

Lösning. Det gäller att

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = e^{-x}$$

vilket vi känner igen som en $exp(1)$-fördelning och det följer att $\mathbb{E}[X] = 1$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$. Vidare gäller

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx = \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

Därför är

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \frac{2y^2}{(1+y^2)^2}dy = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^\infty \frac{2y^3}{(1+y^2)^2}dy = \infty.$$

Alltså är $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \infty$.

2. Du får veta att ett slumpförsök utförs så att först genereras den stokastiska variabeln X som har frekvensfunktion $p_X(0) = p_X(3) = 1/6$ och $p_X(1) = p_X(2) = 1/3$. Sedan väljs en stokastisk variabel Y som är Binomialfördelad med parametrar X och $1/2$.

(a) (2p) Bestäm frekvensfunktionen för Y.

(b) (2p) Om du får veta att $Y = 1$, vad är den betingade sannolikheten att $X = k$, $k = 0, 1, 2, 3$?

Lösning. Det gäller att

$$\mathbb{P}(Y=0) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=0|X=k) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=0|X=k) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{19}{48}$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \sum_{k=2}^{3} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=0|X=k) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{7}{48}$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=3|X=3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

För (b) använd Bayes formel:

$$\mathbb{P}(X=k|Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=1|X=k)}{\mathbb{P}(Y=1)}.$$

Nämnaren beror inte på k, så den kan ses som en normaliserande konstant. Täljarna för $k=0,1,2,3$ är 0, 1/6, 1/6 respektive 3/48, så $\mathbb{P}(X=k|Y=1)$ är för $k=0,1,2,3$: 0, 8/19, 8/19 respektive 3/19.

3. (4p) Antag att två lag, Ankorna och Björnarna, i en given bollsport spelar en slutspelsserie om bäst av fem matcher. Matchschemat är att lagen turas om att ha hemmamatch varannan match tills matchserien är avgjord (dvs tills något lag vunnit tre matcher). Ankorna börjar hemma. Vi antar att lagen är lika bra, men hemmamatch är en fördel, så hemmalaget vinner med sannolikhet 2/3. Resultaten av olika matcher antas vara oberoende.

(a) (2p) Vad är sannolikheten att Ankorna vinner matchserien?

(b) (2p) Vad är sannolikheten att matchserien går till en femte och avgörande match?

Lösning. Låt oss beräkna sannolikheten för att det står 2-2 i matcher efter fyra matcher. Kalla den händelsen för T. Den händelsen kan inträffa genom att något av följande sker:

(i) Båda lagen vinner båda sina två hemmamatcher

(ii) Båda lagen vinner varsin hemmamatch och varsin bortamatch.

(iii) Båda lagen vinner båda sina två bortmatcher.

Fallen (i) och (iii) kan bara ske på ett sätt var, medan (ii) kan ske på fyra sätt. Detta ger

$$\mathbb{P}(T) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{11}{27}.$$

Eftersom T också är händelsen att det blir en avgörande match så är alltså svaret i (b) lika med 33/81. Låt nu A vara händelsen att Ankorna vinner. Då har vi att $\mathbb{P}(A\cap T) = (11/27)*(2/3) = 22/81$. Till detta ska läggas sannolikheten att Ankorna vinner inom de första fyra matcherna. Enligt symmetrin mellan lagen under dessa matcher måste $\mathbb{P}(A\cap T^c) = (1-11/27)/2 = 8/27$ varför

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{27} + \frac{22}{81} = \frac{46}{81}.$$

Lycka till!
Johan Jonasson