Dugga
MVE302/MVE395/TMA321 Sannolikhet och statistik/Sannolikhet, statistik och risk/Matematisk statistik

2021-04-28 kl. 10:00-12:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att ladda upp i Canvas senast kl 12:00 i pdf. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk. Allt som inte innebär att ta hjälp av någon annan människa i realtid är tillåtet.

---

1. Du får veta att ett slumpförsök utförs så att först väljs en stokastisk variabel X med frekvensfunktion given av $p_X(1) = 1/2$, $p_X(3) = 1/3$ och $p_X(5) = 1/6$. Sedan väljs en stokastisk variabel Y som är Poissonfördelad med parameter X.

(a) (2p) Bestäm väntevärde och varians för Y.

(b) (2p) Om du får veta att $Y = 4$, vad är den betingade sannolikheten att $X = k$, $k = 1, 3, 5$?

Lösning. Det gäller enligt TSL att

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y|X=1] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[Y|X=3] + \frac{1}{6}\mathbb{E}[Y|X=5] = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 5 = \frac{7}{3}.$$

För (b) använd Bayes formel:

$$\mathbb{P}(X=k|Y=4) = \frac{\mathbb{P}(Y=4|X=k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{e^{-k}\frac{k^4}{4!}P(X=k)}{\mathbb{P}(Y=4)}.$$

Nämnare beror inte på k, så den kan vi se som en proportionalitetskonstant som ska göra att de betingade sannolikheterna summerar sig till 1. Vi kan också förkorta bort faktorn $1/4!$ de tre täljarna. Efter förkortning är täljarna för $k = 1, 3, 5$ lika med $e^{-1}/2$, $27e^{-3}$ respektive $625e^{-5}/6$, vilket ger

$$\mathbb{P}(X=1|Y=4) = \frac{e^{-1}/2}{e^{-1}/2 + 27e^{-3} + 625e^{-5}/6} \approx 0.082$$

$$\mathbb{P}(X=3|Y=4) = \frac{27e^{-3}}{e^{-1}/2 + 27e^{-3} + 625e^{-5}/6} \approx 0.603$$

$$\mathbb{P}(X=1|Y=4) = \frac{625e^{-5}/6}{e^{-1}/2 + 27e^{-3} + 625e^{-5}/6} \approx 0.315.$$

2. (4p) Låt den kontinuerliga bivariata stokastiska variabeln (X, Y), där X och Y båda är positiva, ha bivariat fördelningsfunktion

$$F(x,y) = \frac{y}{y+1}(1 - e^{-x}),\ x, y \geq 0.$$

Beräkna den bivariata täthetsfunktionen och marginalfördelningarna för X och Y. Är X och Y oberoende?

Lösning. Det gäller att

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y) = \frac{1}{(1+y)^2}e^{-x},\ x, y \geq 0.$$

Vi ser att detta är produkten av täthetsfunktionerna e^{-x} och $1/(y+1)^2$, så X och Y är oberoende och

$$f_X(x) = e^{-x}, \;\; f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$$

(Tätheten för X känner vi igen som $exp(1)$-fördelning.)

3. (a) (2p) Antag att $X \sim N(-1, \sigma^2)$. Hur stort behöver σ vara för att det ska gälla att $\mathbb{P}(X > 0) > 0.4$?

(b) (2p) Antag att $X \sim N(\mu, \mu^2)$, dvs väntevärdet och standardavvikelsen av X är lika. Visa att $\mathbb{P}(X < 0)$ inte beror av μ.

Lösning. För (a) observerar vi att

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{X+1}{\sigma} > \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.4$$

då $\sigma = 1/\Phi^{-1}(0.6)$. Svaret är alltså att det krävs att $\sigma \geq 1/\Phi^{-1}(0.6) \approx 3.95$.

För (b) normaliserar vi igen och ser att

$$\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\mu} < \frac{-\mu}{\mu}\right) = \Phi(-1)$$

som ju inte beror av μ.

Lycka till!
Johan Jonasson