Dugga
MVE302 och MVE395 Sannolikhet och statistik/Sannolikhet, statistik och risk

2020-04-28 kl. 10:00-12:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att ladda upp i Canvas senast kl 12:00 i pdf. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk. Allt som inte innebär att ta hjälp av någon annan människa i realtid är tillåtet.

---

1. (4p) Låt X vara en stokastisk variabel som har täthetsfunktionen $f(x) = c(1 + \sin x)$, $x \in (0, \pi)$. Beräkna konstanten c och beräkna väntevärde och varians för X.

Lösning. Eftersom $\int_0^\pi f(x)dx$ måste vara 1 och $\int_0^\pi (1 + \sin x)dx = \pi + 2$ får vi

$$c = \frac{1}{\pi + 2}$$

och därmed

$$f(x) = \frac{1}{\pi + 2}(1 + \sin x),\ 0 < x < \pi.$$

Därför är

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\pi x\, f(x)dx = \frac{1}{\pi + 2}\frac{\pi^2 + 2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(vilket också framgår av symmetrin hos $f(x)$). Vi får också

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\pi x^2 f(x)dx = \frac{\pi^3 + 3\pi^2 - 12}{3(\pi + 2)}$$

så

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{\pi^3 + 3\pi^2 - 12}{3(\pi + 2)} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2(\pi + 6) - 48}{12(\pi + 2)}.$$

2. (4p) Singla en rättvis slant två gånger. Låt A vara händelsen att det första kastet ger klave, låt B var händelsen att det andra kastet ger klave och C händelsen att de två kasten resulterar i exakt en klave.

(a) Är de tre händelserna parvis oberoende?

(b) Är de tre händelserna oberoende?

Lösning. Alla händelserna har sannolikhet $1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{båda kasten klave}) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\text{först klave sedan krona}) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ och $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\text{först krona sedan klave}) = 1/4 = \mathbb{P}(B \cap C)$. Alltså är alla tre par av händelser oberoende. Däremot är $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ så de tre händelserna är inte oberoende.

3. (4p) Betrakta två tärningar: en åttasidig och en tolvsidig. En av tärningarna väljs på måfå och slås och resultatet noteras. Därefter väljer man åter en gång en av tärningarna på måfå, slår den och noterar resultatet. Givet att summan av de båda utfallen blev 14, vad är den betingade sannolikheten att det var den åttasidiga tärningen som valdes till båda slagen?

Lösning. Låt A_1 vara händelsen att den åttasidiga tärningen väljs båda gångerna, A_2 händelsen att den åttasidiga väljs i första kastet och den tolvsidiga i det andra kastet,

A_3 händelsen att den tolvsidiga väljs i första kastet och den åttasidiga i andra kastet och A_4 händelsen att den tolvsidiga tärningen väljs båda gångerna. Låt B vara händelsen att summan av de två kasten är 14. Vi söker $\mathbb{P}(A_1|B)$ som enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Nu är ju $\mathbb{P}(A_i) = 1/4$ för alla i så dessa kan förkortas bort. Om vi slår den åttasidiga tärningen två gånger så ger utfallen $(8,6)$, $(7,7)$ och $(6,8)$ summan 14 så $\mathbb{P}(B|A_1) = 3/64$. Med den tolvsidiga två gånger är det utfallen $(12,2)$, $(11,3), \ldots, (2,12)$, dvs 11 stycken, som ger summa 14, så $\mathbb{P}(B|A_4) = 11/144$. Med den åttasidiga först och den tolvsidiga sedan är det utfallen $(2,12)$, $(3,11), \ldots, (8,6)$ som ger summan 14, så $\mathbb{P}(B|A_2) = 7/96$. Per symmetri är $\mathbb{P}(B|A_3)$ också lika med $7/96$. Därmed får vi

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{3/64}{3/64 + 2 \cdot 7/96 + 11/144} = 27/155.$$

Lycka till!
Johan Jonasson