Dugga
MVE301 och MVE395 Sannolikhet, statistik och risk

2018-04-26 kl. 18:00-20:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers
Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att maila lösning till examinator senast kl 20:00 i något läsbart format. Ett foto av handskrivna lösningar fungerar bra. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk.

---

1. (4p) En urna innehåller fem svarta och tre vita kulor. Kulorna väljs på måfå, en efter en och utan återläggning. Låt X vara antalet kulor som tagits ur urnan fram till och med att den första vita kulan valts. Bestäm frekvensfunktion, väntevärde och varians för X.

Lösning. Antalet sätt att lägga en rad med tre vita och fem svarta kulor i en rad (utan att göra skillnad på olika svarta kulor eller på olika vita) är $\binom{8}{3}$. Antalet sätt att göra detta så att $X = k$, dvs att de $k-1$ kulorna längst till vänster är svarta och kula nr k är vit är $\binom{8-k}{2}$, eftersom de resterande $8-k$ kulorna kan placeras ut i vilken ordning som helst. Alltså blir sannolikheten att $X = k$ kvoten mellan dessa och efter lite förenklingar får vi

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{(8-k)(7-k)}{112},\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Väntevärdet är då

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{9}{4}$$

och

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{27}{4}$$

och till sist

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{27}{16}.$$

2. (4p) En av tre tärningar väljs på måfå och slås tre gånger. Du får inte veta vilken tärning som valdes, endast att utfallen blev 6, 5 och 3, att tärning 1 är en vanlig tärning som ger utfall i med sannolikhet $1/6$, att tärning 2 ger utfall i med sannolikhet $i/21$ och att tärning 3 ger utfall i med sannolikhet $(2-(-1)^i)/12$. Givet denna information, vad är den betingade sannolikheten att det var tärning n som valdes, $n = 1, 2, 3$?

Lösning. Låt A vara händelsen att sekvensen $6, 5, 3$ observeras och T_i att tärning i väljs, $i = 1, 2, 3$. Uppgiften är att beräkna $\mathbb{P}(T_i|A)$. Enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(T_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|T_i)Pro(T_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Nu beror ju inte nämnaren på i och blir således endast en proportionalitetskonstant. M.a.o. gäller $\mathbb{P}(T_i|A) \propto \mathbb{P}(A|T_i)\mathbb{P}(T_i)$. Eftersom dessutom $\mathbb{P}(T_i) = 1/3$ for alla i så får vi i detta fall $\mathbb{P}(T_i|A) \propto \mathbb{P}(A|T_i)$. Vi har

$$\mathbb{P}(A|T_1) = \frac{1}{6^3},$$

$$\mathbb{P}(A|T_2) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{21^3},$$

$$\mathbb{P}(A|T_3) = \frac{1\cdot 3\cdot 3}{12^3}.$$

För att transformera dessa till sannolikheter, dividerar vi dem var och en med summan av dem och får närmevärdena

$$\mathbb{P}(T_1|A) = 0.237,$$

$$\mathbb{P}(T_2|A) = 0.497,$$

$$\mathbb{P}(T_3|A) = 0.266.$$

(Skulle man tvingas att gissa vilken tärning som valdes, skulle alltså tärning 2 vara den naturliga gissningen. Jag som gjorde uppgiften kan avslöja att det verkligen var tärning 2 som användes till att generera utfallen.)

3. (4p) Låt X vara normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. Beräkna $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^4]$ och $\mathbb{V}\text{ar}(X^2)$. Tips: För en standardnormalfördelad stokastisk variabel Z gäller att $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

Lösning. Utnyttja att det om man låter $X = \sigma Z + \mu$ så är $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Då är

$$X^2 = \sigma^2 Z^2 + 2\sigma\mu Z + \mu^2$$

$$X^4 = \sigma^4 Z^4 + 4\sigma^3\mu Z^3 + 6\sigma^2\mu^2 Z^2 + 4\sigma\mu^3 Z + \mu^4.$$

Eftersom $\mathbb{E}[Z^3] = 0$ av symmetrin hos $N(0,1)$-fördelningen och $E[Z^4] = 3$ får vi nu

$$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2,$$

$$\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$$

och därmed också

$$\mathbb{V}\text{ar}(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2.$$

Lycka till!
Johan Jonasson