MATEMATIK , Göteborgs Universitet
Tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2007-08-23
Hjälpmedel : Inga.
Telefonvakt : 076 - 272 18 60 , 076 - 272 18 61

1. Bestäm höger sidoklasser till delgrupperna $\langle[5]\rangle$ och $\langle[6]\rangle$ i $\mathbf{Z}_{10}$. 3p

2. Låt $SL(2, \mathbf{Z})$ vara gruppen bestående av heltaliga 2×2-matriser med matrismultiplikation som komposition. Bestäm ordningen av följande tre element i $SL(2, \mathbf{Z})$:

$S=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ST . 3p

3 a) Visa att om $\varphi:G\to H$ och $\psi:H\to K$ är grupphomomorfier så är även $\psi\varphi:G\to K$ en grupphomomorfi . 3p

b) Är även kompositionen av två gruppisomorfier en gruppisomorfi ? 1p

4. Ge exempel på en grupp G med en icke-normal delgrupp H och visa att denna delgrupp H ej är normal. 3p

5. Finn $q, r\in \mathbf{Z}[i]$ med $|r| < \sqrt{5}$ så att $(6-5i)=(1+2i)q+r$. 3p

6 Formulera och visa fundamentala homomorfisatsen för ringar. 4p
(Ledning : Beviset liknar beviset för motsvarande sats för grupper.)

7 a) Visa att det finns minst ett polynom över $\mathbf{Z}_3$ av grad 3 som är irreducibelt. 4p

b) Härled utifrån detta att det finns en kropp med 27 element. 1p

Tänk på att alla svar och påståenden måste motiveras för att berättiga till poäng !