MATEMATIK , Göteborgs Universitet
Tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2004-08-11
Hjälpmedel : Inga.
Telefonvakt : Håkan Samuelsson 073 – 977 92 68

1. Vilka av följande binära operationer $\otimes$ är kommutativa resp. associativa på $\mathbf{Z}_+=\{1,2,...\}$?

a) $m\otimes n = m^n$

b) $m\otimes n = mn - m - n + 1$ 4p)

2. Låt G vara en grupp där varje element är lika med sin invers. Visa att G är abelsk. 3p)

3. Bestäm antalet isomorfiklasser av abelska grupper av ordning 2004. 4p)

4. Formulera och bevisa Lagranges sats. 4p)

5. Låt $\mathbf{Q}[x]$ vara ringen av polynom i x med rationella koefficienter. Låt D vara den unära operationen på $\mathbf{Q}[x]$ definierad genom 3p)

$$D(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) = na_nx^n + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$$

Avgör huruvida $D : \mathbf{Q}[x] \to \mathbf{Q}[x]$ är en ringhomorfi eller ej ?

6. Bestäm antalet irreducibla andragradspolynom $x^2 + ax + b \in K[x]$ med ledande koefficient 1 för kroppen $K=\mathbf{Z}_p$ med p element. 4p)

7. Visa att det existerar en kropp med p^2 element för varje primtal p. 3p)

Resultaten anslås om två veckor. Du kan då se din tenta i mottagningsrummet.

Lösningar till tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2004-08-11

1. a) Den binära operationen $m \otimes n = m^n$ är ej kommutativ då $2^3 \neq 3^2$. Den ej heller associativ eftersom t.ex. $(10 \otimes 1) \otimes 10 = (10^1)^{10} = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$ medan $(10 \otimes (1 \otimes 10) = 10^a$ för $a = 1^{10} = 1$ så att $10 \otimes (1 \otimes 10) = 10$.

b) $m \otimes n = (m+1)(n+1) = (n+1)(m+1) = n \otimes m$ så att $\otimes$ är kommutativ .Däremot är ej $\otimes$ assocativ ty man har t.ex. $(1 \otimes 2) \otimes 3 = 6 \otimes 3 = 28$ medan $1 \otimes (2 \otimes 3) = 1 \otimes 12 = 26$

2. För g , $h \in G$ är enligt räknelag i kursboken $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$. Vidare är enligt hypotes $gh = (gh)^{-1}$ och $h^{-1}g^{-1} = hg$. Därför är $gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg$ vilket skulle visas.

3. Talet 2004 har primfaktoriseringen $2004 = 2 \times 2 \times 3 \times 167$. (Att 167 är ett primtal följer av att det inte är delbart med något primtal $< \sqrt{167} < 13$.) Enligt sats i kursboken är därför varje abelsk grupp av ordning 2004 en direkt produkt av abelska grupper av ordning 2×2 , 3 och 167. En dylik grupp är därför isomorf med $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_{167}$ eller $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_{167}$. Dessa grupper är ej isomorfa ty den andra är cyklisk medan den första saknar element av ordning 2004. Det finns alltså två isomorfiklasser av abelska grupper av ordning 2004.

4. Se kursboken för Lagranges sats.

5. Den unära operationen på $\mathbf{Q}[x]$ definierad genom

$$D(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \quad n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

är ej en ringhomomorfi ty man har t.ex. $D(x\,x) = 2x$ medan $D(x)\,D(x) = 1$.

6. Antalet reducibla andragradspolynom $x^2 + ax + b \in \mathbf{Z}_p[x]$ med ledande koefficient 1 är $(p^2+p)/2$. Ty det finns $(p^2-p)/2$ sådana polynom $(x-r)(x-s)$ med två olika nollställen $r, s \in \mathbf{Z}_p$ och p polynom $(x-r)^2$ med ett dubbelt nollställe i $\mathbf{Z}_p$. Det totala antalet "moniska" andragradspolynom $x^2 + ax + b \in \mathbf{Z}_p[x]$ är p^2 eftersom det finns p möjligheter att välja var och en av koefficienterna a och b. Alltså finns precis $p^2 - (p^2+p)/2 = (p^2-p)/2$ irrreducibla andragradspolynom i $\mathbf{Z}_p[x]$ med ledande koefficient 1.

7. Eftersom $(p^2-p)/2 > 0$ finns enligt föregående uppgift ett irredubelt andragradspolynom $x^2 + ax + b$ i $\mathbf{Z}_p[x]$. Detta genererar enligt resultat i kursboken ett maximalt ideal $I = (x^2 + ax + b)$ i $\mathbf{Z}_p[x]$ med en restklasskropp $\mathbf{Z}_p[x]/I$ med p^2 element.