MATEMATIK , Göteborgs Universitet
Tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2004-04-15
Hjälpmedel : Inga.
Telefonvakt : Micke Persson 073 – 977 92 68

1. Visa eller motbevisa följande påståenden.

a) Delgruppen ker $\theta \subseteq G$ är normal för varje grupphomomorfi $\theta : G \to H$. 2p)
b) Delgruppen $\theta(G) \subseteq H$ är normal för varje grupphomomorfi $\theta : G \to H$. 1p)

2. Låt S vara mängden $\{a+b\sqrt{3} : a , b \in \mathbf{Q}\}$.

a) Visa att S är en delring av ringen **R** av rella tal . 2p)
b) Visa att S är en delkropp av kroppen **R** av rella tal . 2p)

3. Skriv x^3-2 som en produkt av ett eller flera irreducibla polynom över följande kroppar.

a) Kroppen **Q** av rationella tal 3p)
b) Kroppen **R** av rella tal 2p)

(Du måste visa att de ingående faktorerna verkligen är irreducibla.)

4. Låt g vara ett element i den symmetriska gruppen S_5. Visa att ordningen av g är högst 6.
Ge också exempel på en permutation av ordning 6 i S_5 . 2,5p)

5. Ge exempel på en ändlig icke-kommutativ ring. 2,5p)

(Du måste visa att den föreslagna ringen är icke-kommutativ.)

6. Låt G vara en ändlig grupp av primtalsordning p .

a) Visa att G är cyklisk. 2p)

b) Visa att G är isomorf med additiva gruppen $\mathbf{Z}_p$. 2p)

(Lagranges sats får användas utan bevis.)

7. Visa att varje ändligt integritetsområde är en kropp. 4p)

Resultaten anslås om två veckor. Du kan då se din tenta i mottagningsrummet
dagligen mellan 12.30 och 13.00.

Lösningar till tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2004-04-15

1. Enligt sats räcker det visa att delmängderna ker $\theta \subseteq G$ resp. $\theta(G) \subseteq H$ är slutna under multiplikation och inversbildning.

a) Om $g, g' \in G$ och θ är en homomorfi så är $\theta(gg') = \theta(g)\theta(g')$. Speciellt är för $g \in \ker\theta$ $\theta(gg') = e_H\,\theta(g') = \theta(g')$.
Om även $g' \in \ker\theta$ är därför $\theta(gg') = \theta(g') = e_H$ och gg' ett element i $\ker\theta$ dvs. $\ker\theta$ sluten under multiplikation.
Om g' invers till g så är $\theta(gg') = \theta(e_G) = e_H$. Om $g \in \ker\theta$ ger därför identiteten $\theta(gg') = \theta(g')$ ovan att $\theta(g') = e_H$ dvs. att $g' \in \ker\theta$. Alltså är $\theta(G)$ sluten under inversbildning.

b) Om $h, h' \in \theta(G)$ så finns $g, g' \in G$ med $\theta(g)=h$ och $\theta(g')=h'$. Då θ är en homomorfi får vi därför att $hh'=\theta(g)\theta(g') = \theta(gg') \in \theta(G)$. Alltså är $\theta(G)$ sluten under multiplikation.
Om $h = \theta(g)$ och $h' = \theta(g')$ för inversen g' av g så är $hh'=\theta(g)\theta(g') = \theta(gg')=\theta(e_G)= e_H$.
Alltså gäller för varje $h \in \theta(G)$ att dess invers $h' \in \theta(G)$

2a) Det räcker enligt sats att visa att mängden $R = \{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ är sluten under addition, additiv inversbildning och muliplikation.

Men summan $(a+b\sqrt{3}) + (a'+b'\sqrt{3})$ av två sådana uttryck är lika med $(a+a') + (b+b')\sqrt{3}$ som tillhör R. Vidare har $a+b\sqrt{3} \in R$ den additiva inversen $-a-b\sqrt{3}$ i R. Slutligen är produkten av $(a+b\sqrt{3})$, $(a'+b'\sqrt{3}) \in R$ lika med $(a\,a'+3\,b\,b') + (a\,b'+a'b)\sqrt{3} \in R$.

2b) Som delring av $\mathbf{R}$ måste R vara en kommutativ ring. Vidare gäller $1 = 1+0\sqrt{3} \in R$. För att se att R är en kropp återstår det därför bara att visa att varje nollskilt element $a+b\sqrt{3}$ i R har en multiplikativ invers. Men enligt konjugatregeln är $(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3}) = a^2-3b^2 \in \mathbf{Q}$. Sätt $c = a^2-3b^2$. Om nu $c \neq 0$ så är därför $(a/c-(b/c)\sqrt{3})$ en mutliplikativ invers till $(a+b\sqrt{3})$ i R.

Det återstår därför bara att visa att två rationella tal a, b bara kan uppfylla $a^2-3b^2=0$ om $b=0$. Antag motsatsen. Då skulle $(a/b)^2=3$ och $\sqrt{3} = \pm(a/b) \in \mathbf{Q}$. Vidare skulle det då finnas två relativt prima positiva heltal p,q så att $\sqrt{3} = p/q$ och $p^2=3q^2$. Men enligt sats om entydig primfaktoruppdelning skulle då $3 \mid p$ eftersom $3 \mid p^2=3q^2$ och 3 är ett primtal. Vidare har vi då implikationerna $3 \mid p \Rightarrow 9 \mid p^2=3q^2 \Rightarrow 3 \mid q^2 \Rightarrow 3 \mid q$ vilket strider mot antagandet att p,q är relativt prima. Alltså gäller att $a^2-3b^2=0 \Rightarrow b=0$ (och $a=0$).

3a) Om $f(x)=x^3-p$ är reducibel över $\mathbf{Q}$ så måste $f(x)$ ha en lineär faktor $x-c$ där $c \in \mathbf{Q}$. Vi skulle då ha att $f(c)=c^3-p=0$ och att $c>0$ eftersom $c^3>0$. För att se att detta är omöjligt skriver vi c som en kvot m/n av två relativt prima heltal. Ur $c^3=p$ följer då $m^3=pn^3$ och enligt sats om entydig primfaktoruppdelning att $p \mid m^3=pn^3 \Rightarrow p \mid m \Rightarrow p^3 \mid m^3=pn^3 \Rightarrow p^2 \mid n^3 \Rightarrow p \mid n^3$ vilket strider mot antagandet att m, n är relativt prima. Alltså saknar x^3-p rationella nollställen och därmed lineära faktorer i $\mathbf{Q}[x]$. Polymomet $f(x)=x^3-p$ är alltså irredcibelt i $\mathbf{Q}[x]$.

3b) Eftesom $f(p^{1/3})=0$ så har enligt faktorsatsen $f(x)=x^3-p$ den lineär reella faktorn $x-p^{1/3}$. Efter polynomdivision erhåller man $f(x)=(x-p^{1/3})g(x)$ där $g(x) = x^2+p^{1/3}x+p^{2/3} \in \mathbf{R}[x]$ måste vara irreducibelt över $\mathbf{R}$ eftersom efter kvadratkomplettering $g(c) = (c+p^{1/3}/2)^2 + [p^{2/3}-(p^{1/3}/2)^2]$ och $(c+p^{1/3}/2)^2 + [p^{2/3}-(p^{1/3}/2)^2] \geq [p^{2/3}-(p^{1/3}/2)^2] = 3\,p^{2/3}/4>0$ för varje $c \in \mathbf{R}$. Alltså är $f(x)=(x-p^{1/3})g(x)$ en faktorisering i irreducibla polynom i $\mathbf{R}[x]$.

4. Om g är en permutation i S_5 så är g en produkt $g_1 \ldots g_r$ av sina cykler. De parvisa produkterna av dessa cykler kommuterar inbördes så att $o(g)$ är den minsta gemensamma

multipeln MGM $\{ o(g_1), \ldots ,o(g_r)\}$ av ordningerna av dessa cykler. Cyklerna ger en partition av mängden $\{1, \ldots ,5\}$ Kardinaliterna av dessa delmängder av $\{1, \ldots ,5\}$ ger en additiv dekomposition av 5 som en summa av positiva heltal. Följande sju möjligheter finns.

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1.$$

Motsvarande värde för $o(g)$ är den minsta gemensamma multipeln av summanderna. Vi får då i tur och ordning att $o(g)$ är 5 ,4,6,3,2,3,2 resp.1. Speciellt är $o(g)\leq 6$ med likhet om och endast om g har en dekomposition i en 3-cykel och en 2-cykel. T.ex. har permutationen $(123)(45)\in S_5$ ordning 6.

5. Låt R vara ringen av alla 2×2-matriser med element i en kropp K där matrisoperationerna är definierade på samma sätt som för reella matriser. Det är lätt att se att denna ring ej är kommutativ för någon kropp. Om t.ex. A är matrisen med rader (0 0) , (1 0) och B matrisen med rader (0 1) , (0 0) så är AB $\neq$ BA. Om K är en ändlig kropp med p element så är R alltså en ändlig icke-kommutativ ring med p^4 element.

6. Se kursboken eller föreläsningsnoterna på Internet.

7 Se kursboken eller föreläsningsnoterna på Internet.