MATEMATIK , Göteborgs Universitet
Tentamen i Algebraiska Strukturer (MAL 600 , MAN 290) 2004-03-17
Hjälpmedel : Inga.
Telefonvakt : Fredrik Engström 0740 -350646

1. Låt $U(\mathbf{Z}_8)$ vara den multiplikativa gruppen av inverterbara element i ringen $\mathbf{Z}_8$.

a) Gör en Cayley-tabell för $U(\mathbf{Z}_8)$. 3p)
b) Avgör om $U(\mathbf{Z}_8)$ är en cyklisk grupp. 1p)

2. Visa att det finns två ändliga grupper av samma ordning som inte är isomorfa . 3p)

3 Låt G vara en grupp och låt ~ vara den relation på G där

$$g \sim h \quad \Leftrightarrow \quad gh = hg.$$

Vilka av följande påståenden är korrekta ?

a) Om G är abelsk så är ~ en ekvivalensrelation . 2p)

b) Om G är icke-abelsk så är ~ ej en ekvivalensrelation 2p)

4. Låt $\varphi : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n$ vara avbildningen där $\varphi(x) = x^n$ för alla $x \in \mathbf{Z}_n$.

a) Är φ en ringhomomorfi om n=3 ? Om ja, är φ även en ringisomorfi? 2p)
b) Är φ en ringhomomorfi om n=4 ? Om ja, är φ även en ringisomorfi ? 2p)

5. Visa att varje ideal i $\mathbf{Z}$ eller $\mathbf{Q}[x]$ är ett huvudideal. 3p)

(Det räcker att behandla en av ringarna för att få full poäng.)

6. Låt p vara ett primtal och $\mathbf{Z}[i]$ ringen av Gaussiska heltal.

a) Visa att p förblir irrreducibelt i $\mathbf{Z}[i]$ om $p \equiv 3 \pmod 4$. 3p)
b) Gäller detta även om $p \equiv 1 \pmod 4$? 1p)

7. Visa att det finns en icke-abelsk grupp av ordning 2004 . 3p)

Resultaten anslås om två veckor. Du kan då se din tenta i mottagningsrummet
dagligen mellan 12.30 och 13.00.