**MATEMATISKA VETENSKAPER** **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2025-08-26 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Tentamen 031-772 5396

# MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2025 räknas med.

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Lös uppgifterna i valfri ordning, men **lämna in i nummerordning.** Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1**. Låt $F(x, y, z) = 10 + x^2 + y^3 + xz - yz - z^3$.

(a) Visa att $F(x, y, z) = 0$ entydigt definierar en funktion $f(x, z)$, så att $y = f(x, z)$ i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$ och bestäm $f_z'(-1, 2)$. (2p)

(b) Bestäm tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 0$ i punkten $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$. (2p)

**2**. (a) Beräkna integralen (3p)

$$\int_0^1 \int_y^1 y\cos\big(x^3\big)\,dxdy.$$

(b) Beräkna $\displaystyle\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^3+y}}dxdy$ där $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. (3p)

**3**. Använd variabelbytet $u = x$, $v = y/x$ för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ för $x > 0$ till PDE:n (5p)

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

**4**. Kuvan $\gamma$ parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t(1-t)^2 \\ t^2(1-t) \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Den är en är en enkel sluten kurva i första kvadranten. Använd Greens sats för att beräkna arean av området som innesluts av $\gamma$. Glöm inte att motivera orienteringen. (4p)

**5**. Låt $f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3y^2$ och $g(x, y) = x - y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y)$. (1p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Bestäm om möjligt största och minsta värde av $f(x, y)$ på området som ges av $g(x, y) \geq 0$. Motivera existens eller icke-existens av max/min. (4p)

**6**. Ljuset från en ljuskälla i origo kan beskrivas med fältet $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Vi vill beräkna ljusflödet genom en lampskärm som beskrivs av ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = (1 - z/\sqrt{3})^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}/2\}.$$

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom $Y$ med hjälp av en lämplig parametrisering av ytan. Tips: $\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{\sqrt{t^2 + a(1-t)^2}}\right) = \frac{t}{\left(t^2 + a(1-t)^2\right)^{3/2}}$ för $a > 0$. (3p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom $Y$ med Gauss sats geom att lägga till **en** lämplig yta. (4p)

**7**. Låt $f(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(x - t)dt$. Visa att $f(x)$ uppfyller differentialekvationen (3p)

$$f'(x) - 2f(x) = \sin(x).$$

**8**. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ är differentierbara överallt. Bevisa att (6p)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}$$

(b) Låt $f$ och $g$ vara $C^1$ funktioner av två variabler. Antag att $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ minimerar $f$ under bivillkoret $g = 0$ och att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i definitionsmängderna till $f$ och $g$. Visa att $\nabla f(\mathbf{a})$ och $\nabla g(\mathbf{a})$ är parallella. (4p)

(c) Låt $\gamma$ vara en kurva med parametrisering $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ och låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^n$. Formulera en integral som beskriver arbetet av $\mathbf{F}$ längs $\gamma$. (1p)

(d) Definiera begreppet *enkelt sammanhängande* för mängder i $\mathbb{R}^3$. (2p)

(e) Definiera begreppet *virvelfritt vektorfält* i $\mathbb{R}^3$. (1p)

**Lycka till!**

# Formelblad MVE035 och MVE600

## Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

## Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

**MATEMATISKA VETENSKAPER**
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

**Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**
Datum: 2025-08-26 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

# MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2025 räknas med.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Lös uppgifterna i valfri ordning, men **lämna in i nummerordning.** Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** Låt $F(x,y,z) = 10 + x^2 + y^3 + xz - yz - z^3$.

(a) Visa att $F(x,y,z) = 0$ entydigt definierar en funktion $f(x,z)$, så att $y = f(x,z)$ i en omgivning av punkten $(x,y,z) = (-1,1,2)$ och bestäm $f'_z(-1,2)$. (2p)

(b) Bestäm tangentplanet till ytan $F(x,y,z) = 0$ i punkten $(x,y,z) = (-1,1,2)$. (2p)

**Lösning**:

(a) Funktionen $F \in C^1$ och $F(-1,1,2) = 0$. Derivering ger $F'_x(x,y,z) = 2x+z$, $F'_y(x,y,z) = 3y^2 - z$, $F'_z(x,y,z) = x - y - 3z^2$. I punkten är $F'_y(-1,1,2) = 1 \neq 0$, så implicita funktionssatsen ger att det finns $f \in C^1$, så att ytan $F(x,y,z) = 0$ ges av $y = f(x,z)$ i en omgivning av punkten $(x,y,z) = (-1,1,2)$. Satsen ger också $f'_z(-1,2) = \dfrac{-F'_z(-1,1,2)}{F'_y(-1,1,2)} = 14$.

(b) Baspunkten $(-1,1,2)$ ligger på ytan. En normal till ytan ges av $\nabla F(-1,1,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$. Tangentplanets ekvation är därför $0(x+1) + 1(y-1) - 14(z-2) = 0 \Leftrightarrow y - 14z = -27$.

**2.** (a) Beräkna integralen (3p)

$$\int_0^1 \int_y^1 y\cos\left(x^3\right) dxdy.$$

(b) Beräkna $\displaystyle\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^3+y}} dxdy$ där $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. (3p)

**Lösning**:

(a) Vi kan inte hitta en enkel primitiv funktion till $\cos\left(x^3\right)$, så vi använder Fubini för att kasta om ordningen. Gränserna är $0 \leq y \leq x \leq 1$, så vi får

$$\int_0^1 \int_y^1 y\cos\left(x^3\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^x y\cos\left(x^3\right) dydx = \int_0^1 \cos\left(x^3\right) \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cos\left(x^3\right) \underset{u=x^3}{=} \frac{1}{6}\int_0^1 \cos(u)du = \frac{1}{6}\Big[\sin(u)\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\sin 1.$$

(b) Vi använder metoden med nivåkurvor. För varje $u \in [0,1]$ låt

$$E_u = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y \leq u, y \geq 0, x \geq 0\},$$

som beskriver området i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = u - x^3$. Arean av $E_u$ är

$$A(u) = \int_0^{u^{1/3}} u - x^3 dx = \Big[ux - \frac{u^4}{4}\Big]_0^{u^{1/3}} = \frac{3}{4}u^{4/3}.$$

Integralen blir

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^3+y}}dxdy = \int_0^1 u^{-1/2}A'(u)du = \int_0^1 u^{-1/6}du = \frac{6}{5}\Big[u^{5/6}\Big]_0^1 = \frac{6}{5}.$$

**3**. Använd variabelbytet $u = x$, $v = y/x$ för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ för $x > 0$ till PDE:n (5p)

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

**Lösning**: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial v},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v},\\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\Big) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2}{\partial v^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\Big) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$2x = -\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} \;\Leftrightarrow\; 2u = \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Låter vi $g = \frac{\partial f}{\partial v}$ får vi $2u = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{u}g$ som är linjär av första ordingen. $-\ln(u)$ är primitiv till $-1/u$, så integrerande faktorn blir $e^{-\ln u} = 1/u$. Så PDE:n förenklas till

$$2 = \frac{1}{u}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{u^2}g = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{g}{u}\Big) \;\Rightarrow\; \frac{g}{u} = 2u + h_1(v),$$

där $h_1(v)$ är en godtycklig funktion av $v$. Detta innebär

$$\frac{\partial f}{\partial v} = ug = 2u^2 + uh_1(v).$$

Integrerar vi med avseende på $v$ får vi $f = 2u^2v + uH_1(v) + H_2(u)$ där $H_1'(v) = h_1(v)$ och $H_2(u)$ är godtycklig. Byter vi tillbaka till $(x, y)$ får vi:
**Svar:** $f(x, y) = 2xy + xH_1(y/x) + H_2(x)$, där $H_1$ och $H_2$ är godtyckliga $C^2$ funktioner.

**4**. Kuvan $\gamma$ parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t(1-t)^2 \\ t^2(1-t) \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Den är en är en enkel sluten kurva i första kvadranten. Använd Greens sats för att beräkna arean av området som innesluts av $\gamma$. Glöm inte att motivera orienteringen. (4p)

**Lösning**: Tangenten ges av $\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} (t-1)(3t-1) \\ -t(3t-2) \end{bmatrix}$. Speciellt är $\mathbf{r}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{r}'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Så kurvan börjar åt höger och slutar nedåt. Kurvan är därmed positivt orienterad.

Vi vill beräkna arean av området $D$ som har orienterad rand $\partial D = \gamma$. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$. Då är arean av $D$

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= \iint_D 1 dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ t(1-t)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (t-1)(3t-1) \\ -t(3t-2) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_0^1 (2t^2 - 7t^3 + 8t^4 - 3t^5) dt = \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

**5**. Låt $f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3y^2$ och $g(x,y) = x - y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (1p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Bestäm om möjligt största och minsta värde av $f(x,y)$ på området som ges av $g(x,y) \geq 0$. Motivera existens eller icke-existens av max/min. (4p)

**Lösning**:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^2 - 4x \\ -6y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x(x-1) \\ 0 = y \end{cases}$.
Därför är de stationära punkterna $(0,0)$ och $(1,0)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix} 8x-4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. I punkten $(0,0)$ får vi $\det(H(0,0)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 > 0$ och första komponenten $(-4)$ är negativ vilket innebär att Hessianen är negativt definit och $f(0,0) = 0$ är en lokal maxpunkt. I punkten $(1,0)$ får vi $\det(H(1,0)) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -24 < 0$ gör att vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(1,0) = -\frac{2}{3}$ är en sadelpunkt.

(c) Området $g(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y^2$ är området till höger om parabeln $x = y^2$. Området är obegränsat, men $f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3y^2 \geq \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \to \infty$ då $x \to \infty$, så det existerar inget maxvärde. Dessutom finns det en konstant $K$ så att $f(x,y) > f(0,0) = 0$ för alla $x \geq K$. Därför kan minpunkt bara finnas på det kompakta området $D = \{(x,y) | g(x,y) \geq 0, x \geq K\}$. Målfunktionen $f$ är kontinuerlig och $D$ är kompakt så minpunkt existerar. Vi har inga inre stationära punkter på grund av att $(0,0)$ ligger på randen och $(1,0)$ är en sadelpunkt. Minpunkt kan inte finnas på $x = K$, så det återstår att minimera $f$ på $g(x,y) = 0$. Lagranges metod ger min endast kan uppträda då $\nabla f$ och $\nabla g$ är parallella samtidigt som $g = 0$. De är parallella om $0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -4x + 4x^2 & -6y \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = 6y + 8xy - 8x^2 y = -8(x - 3/2)(x + 1/2)y$, men $x = y^2 \geq 0$, så $x = -1/2$ ger ingen lösning. Vi får kandidaterna $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ som har funktionsvärden $f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{9}{2}$.

**Svar:** $f$ antar minsta värde $f\left(\frac{3}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{9}{2}$. Största värde saknas.

**6**. Ljuset från en ljuskälla i origo kan beskrivas med fältet $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Vi vill beräkna ljusflödet genom en lampskärm som beskrivs av ytan

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = (1 - z/\sqrt{3})^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}/2\}.$$

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom $Y$ med hjälp av en lämplig parametrisering av ytan. Tips: $\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{\sqrt{t^2+a(1-t)^2}}\right) = \frac{t}{\left(t^2+a(1-t)^2\right)^{3/2}}$ för $a > 0$. (3p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom $Y$ med Gauss sats geom att lägga till **en** lämplig yta. (4p)

**Lösning**:

(a) På grund av att $1 - z/\sqrt{3} > 0$ så kan vi beskriva ytan som en funktionsyta $z = \sqrt{3}(1 - \sqrt{x^2+y^2})$. Gränserna ges av nedre ringen $z = 0, x^2 + y^2 = 1$ och övre ringen $z = \sqrt{3}/2, x^2 + y^2 = 1/4$. På grund av symmetrin kan vi använda cylindriska koordinater, så parametriseringen blir $\mathbf{r}(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \sqrt{3}(1-\rho))$. Gränserna blir $1/2 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Enhetsnormalen gånger area-elementet blir $\hat{\mathbf{N}}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\rho d\varphi = \begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\sqrt{3}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0\end{bmatrix} d\rho d\varphi = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\rho\cos\varphi \\ \sqrt{3}\rho\sin\varphi \\ \rho\end{bmatrix} d\rho d\varphi$. Den är riktad uppåt på grund av $z$-komponenten är positiv. Flödet blir

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1 (\rho^2+3(1-\rho)^2)^{-3/2} \begin{bmatrix}\rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \sqrt{3}(1-\rho)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sqrt{3}\rho\cos\varphi \\ \sqrt{3}\rho\sin\varphi \\ \rho\end{bmatrix} d\rho d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{3}\,\rho}{(\rho^2+3(1-\rho)^2)^{3/2}} d\rho d\varphi = 2\sqrt{3}\pi\left[\frac{\rho-1}{\sqrt{\rho^2+3(1-\rho)^2}}\right]_{1/2}^1 = \sqrt{3}\pi.$$

(b) Ytan är inte sluten, så vi behöver lägga till någon lämplig yta. På grund av att fältet har sfärisk symmetri är det lämpligt att lägga till en del av en sfär. Vi ser att sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ skär $Y$ i $z = 0$ och $z = \sqrt{3}/2$. Därför låter vi $Y_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ 0 \le z \le \sqrt{3}/2\}$. Tillsammans innesluter $Y$ och $Y_2$ ett ringformat område $K$. Utanför origo blir $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. På grund av att origo inte ligger i $K$ kan vi använda Gauss sats, som ger

$$0 = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}dV = -\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS$$

Tecknet beror på att normalen på $Y$ pekar upp dvs, in i $K$ istället för ut ur $K$. Med sfäriska koordinater kan vi parametrisera $Y_2$ med $\mathbf{r}(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $\pi/6 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Enhetsnormalen gånger area-elementet blir $\hat{\mathbf{N}}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\theta d\phi = \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi\sin\theta \\ 0\end{bmatrix} d\theta d\phi = \begin{bmatrix}\sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\theta\end{bmatrix} d\theta d\phi.$

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\theta\end{bmatrix} d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\phi = \sqrt{3}\pi.$$

**7**. Låt $f(x) = \int_0^x e^{2t}\sin(x-t)dt$. Visa att $f(x)$ uppfyller differentialekvationen (3p)

$$f'(x) - 2f(x) = \sin(x).$$

**Lösning**: Integranden $g(x,t) = e^{2t}\sin(x-t)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x g'_x(x,t)dt + g(x,x)\frac{d}{dx}(x) = -\int_0^x e^{2t}\cos(x-t)dt \\
&\underset{PI}{=} -\Big[\sin(x-t)e^{2t}\Big]_{t=0}^{x} + \int_0^x \sin(x-t)2e^{2t}dt = \sin(x) + 2f(x). \\
&\Rightarrow f'(x) - 2f(x) = \sin(x).
\end{aligned}$$

**8.** (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ är differentierbara överallt. Bevisa att (6p)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}$$

(b) Låt $f$ och $g$ vara $C^1$ funktioner av två variabler. Antag att $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ minimerar $f$ under bivillkoret $g = 0$ och att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i definitionsmängderna till $f$ och $g$. Visa att $\nabla f(\mathbf{a})$ och $\nabla g(\mathbf{a})$ är parallella. (4p)

(c) Låt $\gamma$ vara en kurva med parametrisering $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ och låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^n$. Formulera en integral som beskriver arbetet av $\mathbf{F}$ längs $\gamma$. (1p)

(d) Definiera begreppet *enkelt sammanhängande* för mängder i $\mathbb{R}^3$. (2p)

(e) Definiera begreppet *virvelfritt vektorfält* i $\mathbb{R}^3$. (1p)

**Lösning**:

(a) Se filen med bevis av sats 2.3.4 på Canvas sidan.

(b) Se boken Sats 4.3.1.

(c) Arbetet ges av $\displaystyle\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$

(d) En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sägs vara enkelt sammanhängande om den är bågvist sammanhängnade och varje enkel sluten kurva i $M$ kan kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna $M$.

(e) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är virvelfritt om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**Lycka till!**

## Formelblad MVE035 och MVE600

### Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

### Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

### Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$