MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2025-06-10 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Wernstål

Tentamen 031-772 35 57

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2025 räknas med.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Lös uppgifterna i valfri ordning, men **lämna in i nummerordning.** Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Studera variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$

$$u = \tfrac{1}{2}x^2 + 2y^2,$$
$$v = 2x^2 + \tfrac{1}{2}y^2.$$

Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$4y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x}.$$

2. (a) Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \ln 2, y \geq 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)dxdy.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}dxdy.$$

(3p)

3. (a) En differentierbar funktion $f(x, y, z)$ växer i origo snabbast i riktningen $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ och i den riktningen är riktningsderivatan 6. Beräkna funktionens riktningsderivata i origo och i riktning mot $(2, 2, 1)$. (2p)

(b) Låt $F(x, y, z) = -\frac{1}{3} + xy^2 + xz + \frac{1}{3}z^3$. Motivera varför ekvationen $F(x, y, z) = 5$ definierar en implicit funktion $z = h(x, y)$ i en omgivning av $(1, 2, 1)$ och bestäm h'_x, h'_y och h''_{xy} i punkten. (3p)

4. Låt $\mathbf{F} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix}x^2 - y + y^2\\ x\end{bmatrix}$.

(a) Beräkna arbetet av $\mathbf{F}$ längs följande kurvor med valfri metod. (3p)

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos(t), y = \sin(t), 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}\},$$
$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos(t), y = \sin(t), \tfrac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi\},$$
$$\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1 - t)/2, y = (1 + t)/2, -1 \leq t \leq 1\}.$$

(b) Använd teori från kursen för att förklara likheter/olikheter i (a) uppgiften. (2p)

5. Låt $f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2xy + 2y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter. (2p)

(b) Använd Hessianen för att klassificera de stationära punkterna. (2p)

(c) Undersök ifall $f(x,y)$ har största respektive minsta värde på området

$$D = \{(x,y) |\ 0 \leq y \leq x\}$$

och bestäm i så fall dessa. Glöm inte att motivera existensen. (4p)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4yz \\ -xz \\ z^2-1 \end{bmatrix}$ upp genom ytan

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

med följande metoder:

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Valfri parametrisering av ytan. (3p)

7. Låt $f(x) = \int_0^x \exp(t^2)\cos(t-x)dt$. Visa att $f(x)$ löser differentialekvationen (4p)

$$f(x) + f''(x) = 2x\exp(x^2).$$

8. (a) Antag att $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ är en axelparallell rektangel och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig. Visa att f är integrerbar över Δ. (5p)

(b) Bevisa Taylors formel av ordning 2 för en skalärvärd funktion av två variabler av klass C^3 utgående från motsvarande envariabel-resultat.
Uttryck resttermen med derivator, ej $\mathcal{O}$-notation. (5p)

(c) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (2p)

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2025 räknas med.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Lös uppgifterna i valfri ordning, men **lämna in i nummerordning.** Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Studera variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$

$$u = \tfrac{1}{2}x^2 + 2y^2,$$
$$v = 2x^2 + \tfrac{1}{2}y^2.$$

Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$4y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x}.$$

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = x\frac{\partial f}{\partial u} + 4x\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = 4y\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$\frac{2y}{x} = 4y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 15xy\frac{\partial f}{\partial v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2}{15x^2}.$$

Observera att $4v - u = \frac{15}{2}x^2 > 0$. Så PDE:n förenklas till $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{4v-u}$ som har allmän lösning $f(u, v) = \frac{1}{4}\ln(4v - u) + g(u)$ där $g(v)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x, y) får vi $f(x, y) = \frac{1}{4}\ln(\frac{15}{2}x^2) + g(\frac{1}{2}x^2 + 2y^2) = \frac{1}{4}\ln(x^2) + \frac{1}{4}\ln(\frac{15}{2}) + g(\frac{1}{2}x^2 + 2y^2)$. Observera att konstanten kan bakas in i den godtyckliga funktionen och att $x > 0$.
Svar: $f(x, y) = \ln(\sqrt{x}) + h(\frac{1}{2}x^2 + 2y^2)$, där h är en godtycklig C^1 funktion.

2. (a) Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \ln 2, y \geq 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)dxdy.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}dxdy.$$

(3p)

Lösning:

(a) Byte till polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ger att området beskrivs av $0 \le r \le \sqrt{\ln 2}$, $0 \le \theta \le \pi$. Areaelementet blir $dxdy = rdrd\theta$ och integralen blir

$$\iint_D \exp(x^2+y^2)dxdy = \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{\ln 2}} \exp(r^2)rdrd\theta \underset{u=r^2}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\ln 2} e^u du$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big[e^u\Big]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Integralen blir enklare ifall vi använder Fubini för att kasta om integrations-ordningen. Området kan beskrivas med olikheterna $0 \le y \le x \le 1$, så vi får

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^2}{(x^2+y)^2}dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^2}{(x^2+y)^2}dydx \underset{u=x^2+y}{=} \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+x} \frac{x^2}{u^2}dudx$$
$$= \int_0^1 \left[-\frac{x^2}{u}\right]_{x^2}^{x^2+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \big[\ln(x+1)\big]_0^1 = \ln 2.$$

3. (a) En differentierbar funktion $f(x,y,z)$ växer i origo snabbast i riktningen $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ och i den riktningen är riktningsderivatan 6. Beräkna funktionens riktningsderivata i origo och i riktning mot $(2,2,1)$. (2p)

(b) Låt $F(x,y,z) = -\frac{1}{3} + xy^2 + xz + \frac{1}{3}z^3$. Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = 5$ definierar en implicit funktion $z = h(x,y)$ i en omgivning av $(1,2,1)$ och bestäm h'_x, h'_y och h''_{xy} i punkten. (3p)

Lösning:

(a) En funktion växer snabbast i gradientens riktning, så i origo är $\nabla f(\mathbf{0}) = k\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ för något $k > 0$, och riktningsderivatan i den riktningen är $6 = \|\nabla f\| = k\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3k$, så $k = 2$. Den normaliserade riktningsvektorn från origo till $(2,2,1)$ ges av $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$. Riktningsderivatan blir $f'_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f(\mathbf{0}) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{16}{3}$.

(b) Funktionen $F \in C^2$ och $F(1,2,1) = 5$. Derivering ger $F'_x(x,y,z) = y^2+z$, $F'_y(x,y,z) = 2xy$, $F'_z(x,y,z) = x+z^2$. I punkten är $F'_z(1,2,1) = 2 \ne 0$, så implicita funktions-satsen ger att det finns en funktion h så att $z = h(x,y)$ i en omgivning av punkten. Satsen ger också att i en omgivning av $(1,2,1)$ får vi $h'_x(x,y) = \frac{-F'_x}{F'_z} = -\frac{y^2+z}{x+z^2} = -\frac{y^2+h(x,y)}{x+(h(x,y))^2}$, $h'_y(x,y) = \frac{-F'_y}{F'_z} = -\frac{2xy}{x+z^2} = -\frac{2xy}{x+(h(x,y))^2}$. Deriverar vi får vi

$$h''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y^2+h(x,y)}{x+(h(x,y))^2}\Big) = -\frac{(2y+h'_y)(x+h^2)-(y^2+h)2hh'_y}{(x+h^2)^2}.$$

I punkten får vi $h'_x(1,2) = -5/2$, $h'_y(1,2) = -2$, $h''_{xy}(1,2) = -6$.

4. Låt $\mathbf{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix}x^2-y+y^2\\x\end{bmatrix}$.

(a) Beräkna arbetet av $\mathbf{F}$ längs följande kurvor med valfri metod. (3p)

$$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos(t), y = \sin(t), 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\},$$
$$\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos(t), y = \sin(t), \tfrac{\pi}{2} \le t \le 2\pi\},$$
$$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1-t)/2, y = (1+t)/2, -1 \le t \le 1\}.$$

(b) Använd teori från kursen för att förklara likheter/olikheter i (a) uppgiften. (2p)

Lösning:

(a) För γ_1 och γ_2 har vi $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \begin{bmatrix} 1-\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 1 - \sin(t)$.

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (1-\sin(t))dt = \Big[t + \cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1,$$
$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/2}^{2\pi} (1-\sin(t))dt = \Big[t + \cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2} + 1.$$

För γ_3 har vi $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-t \\ 1+t \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t^2-t \\ 1-t \end{bmatrix}$ och

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{1-t^2}{2+2t^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+t^2},$$
$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+t^2}\Big)dt = \Big[-\frac{t}{2} + \arctan(t)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Svar: $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2} - 1$, $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{2} + 1$, $\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2} - 1$.

(b) Utanför origo är $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, så fältet är virvelfritt där. Låt D_1 vara området mellan γ_1 och γ_3. Det är ett enkelt sammanhängande område i första kvadranten och $\mathbf{F}$ är C^1 på D_1. Greens sats ger att arbetsintegralen längs randen $\partial D_1 = \gamma_1 - \gamma_3$ är noll. Detta förklarar varför arbetet längs γ_1 och γ_3 är lika. Låt D_2 vara området mellan γ_1 och γ_2, dvs enheltscirkeln. Fältet $\mathbf{F}$ är singulärt i origo, som ingår i området D_2. Greens sats kan därför inte tillämpas på D_2. Arbetet längs γ_1 och γ_2 är olika på grund av att $\mathbf{F}$ inte är konservativt.

5. Låt $f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2xy + 2y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter. (2p)

(b) Använd Hessianen för att klassificera de stationära punkterna. (2p)

(c) Undersök ifall $f(x,y)$ har största respektive minsta värde på området

$$D = \{(x,y) |\ 0 \le y \le x\}$$

och bestäm i så fall dessa. Glöm inte att motivera existensen. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna löser $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2y \\ -2x + 4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x(x-3) \\ y = x/2 \end{cases}$.
Så vi får de stationära punkterna $(0,0)$ och $(3,3/2)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. För punkten $(0,0)$ får vi $\det(H(0,0)) = -6 < 0$ så $H(0,0)$ är indefinit och $(0,0)$ är en sadelpunkt. För punkten $(3,3/2)$ får vi $\det(H(3,3/2)) = 6 > 0$ och första komponenten $x - \frac{1}{2} = 5/2 > 0$, så $H(3,3/2)$ är positivt definit och $(3,3/2)$ är en lokal minpunkt.

(c) På randen har vi antingen $y = x$ eller $y = 0$. $g(x) = f(x,x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$. $0 = g'(x) = \frac{1}{2}(x-1)x$ så punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$ är kandidater. $h(x) = f(x,0) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = g(x)$, så $(0,0)$ och $(1,0)$ är kandidater. I polära koordinater får vi $f(r,\theta) = \frac{1}{6}r^3\cos^3\theta - \frac{1}{4}r^2\cos^2\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta + 2r^2\sin^2\theta$. Begränsar vi till en cirkel med radie r, får vi även en rand med $0 \leq \theta \leq \pi/4$. På grund av att $\cos\theta > 0$ där så får vi att r^3 termen är positiv och dominerar ifall r är tillräckligt stor, så minimum kan inte inträffa för stora r. Därför måste minimum inträffa i någon av kandidatpunkterna eller den inre punkten från (b) uppgiften. Maximum kan inte existera på grund av att $f \to \infty$ då $r \to \infty$.

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1,1) = -1/12, \qquad f(1,0) = -1/12, \qquad f(3,3/2) = -9/4.$$

Svar: Minsta värdet på D är $f(3,3/2) = -9/4$. Största värde existerar inte.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4yz \\ -xz \\ z^2-1 \end{bmatrix}$ upp genom ytan

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

med följande metoder:

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Valfri parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) Ytan Y är inte sluten, men lägger vi till ytan $Y_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2 \leq 1, z = 0\}$ med normal $\hat{N} = -\hat{z}$ får vi $Y \cup Y_2 = \partial K$ där $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Byter vi till koordinater $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = \frac{1}{2}r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ får vi $dV = dxdydz = \frac{1}{2}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$, på grund av att det bara är en omskalning av sfäriska koordinater. K ges av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Divergensen blir $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2z$. Gauss sats ger nu

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

På Y_2 blir $\mathbf{F} \cdot \hat{N} = 1 - z^2 = 1$ så med elliptiska koordinater $x = r\cos\phi$, $y = \frac{1}{2}r\sin\phi$ får vi $dS = \frac{1}{2}rdrd\phi$ och

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}rdrd\phi = 2\pi\left[\frac{r^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$
$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2r\cos\theta\,\frac{r^2}{2}\sin\theta drd\theta d\phi = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$.

(b) I koordinaterna ovan ges Y av $r = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, så en naturlig parametrisering är

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \frac{1}{2}\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{N}dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi}\right)d\theta d\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\phi\sin^2\theta \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} d\theta d\phi$$
$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = \begin{bmatrix} 2\cos\theta\sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\theta \\ -\sin^2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\phi\sin^2\theta \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} d\theta d\phi = -\frac{1}{2}\cos\theta\sin^3\theta d\theta d\phi$$

Flödet blir

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^3\theta d\theta d\phi = -\pi\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} = -\pi/4.$$

7. Låt $f(x) = \int_0^x \exp(t^2)\cos(t-x)dt$. Visa att $f(x)$ löser differentialekvationen (4p)

$$f(x) + f''(x) = 2x\exp(x^2).$$

Lösning: Integranden $g(x,t) = \exp(t^2)\cos(t-x)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$g(x,x) = \exp(x^2), \qquad g'_x(x,t) = \exp(t^2)\sin(t-x),$$
$$f'(x) = \int_0^x g'_x(x,t)dt + g(x,x)\frac{d}{dx}(x) = \exp(x^2) + \int_0^x \exp(t^2)\sin(t-x)dt.$$

Om vi låter $h(x,t) = \exp(t^2)\sin(t-x)$, får vi på samma sätt

$$h(x,x) = 0, \qquad h'_x(x,t) = -\exp(t^2)\cos(t-x),$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\big(\exp(x^2)\big) + \int_0^x h'_x(x,t)dt + h(x,x)\frac{d}{dx}(x) = 2x\exp(x^2) - \int_0^x \exp(t^2)\cos(t-x)dt$$
$$= 2x\exp(x^2) - f(x).$$

8. (a) Antag att $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ är en axelparallell rektangel och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig. Visa att f är integrerbar över Δ. (5p)

(b) Bevisa Taylors formel av ordning 2 för en skalärvärd funktion av två variabler av klass C^3 utgående från motsvarande envariabel-resultat.
Uttryck resttermen med derivator, ej $\mathcal{O}$-notation. (5p)

(c) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (2p)

Lösning:

(a) Se sidan 237 i boken.

(b) Vi vill Taylor-utveckla $f(x,y) \in C^3$ kring (a,b). Fixera (h,k) och låt $F(t) = f(a + th, b+tk) \in C^3$. Taylorutveckling av F kring $t = 0$ ger

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + F''(\xi)\frac{t^3}{3!},$$

för något ξ mellan 0 och t. Kedjeregeln ger

$$F'(t) = \frac{d}{dt}(f(a+th,b+tk)) = f'_x(a+th,b+tk)h + f'_y(a+th,b+tk)k$$
$$= ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f)(a+th,b+tk)$$

F' och $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f$ har samma relation som F och f, så vi kan upprepa och få

$$F^{(i)}(t) = ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^i f)(a+th,b+tk)$$

Sätter vi $t = 1$ i Taylorutvecklingen får vi

$$f(a+h,b+k) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\xi)$$
$$= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f)(a,b)$$
$$+ ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f)(a+\xi h, b+\xi k)$$
$$= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f''_x x(a,b) + 2hkf''_x y(a,b) + k^2 f''_y y(a,b))$$
$$+ ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f)(a+\xi h, b+\xi k),$$

för något $0 \le \xi \le 1$.

(c) Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara inre punkt i D_f. f är då differentierbar i $\mathbf{a}$ om det finns en konstant vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så att $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ och

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}).$$

Då gäller även $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{A}$.

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$