MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2025-03-19 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2025 räknas med.

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästiga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Studera variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$

$$u = x^2 + y^{-2},$$
$$v = xy.$$

(a) Beräkna $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}$ uttryckt i variablerna (u, v). (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy.$$

Lösning:

(a) Funtionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y^{-3} \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^{-2} = 2u.$$

Den omvända funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{2u}.$$

(b) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = -2y^{-3}\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$\underbrace{xy}_{v} = 2x^2\frac{\partial f}{\partial u} + xy\frac{\partial f}{\partial v} + 2y^{-2}\frac{\partial f}{\partial u} - xy\frac{\partial f}{\partial v} = 2\underbrace{(x^2 + y^{-2})}_{u}\frac{\partial f}{\partial u}$$

Så PDE:n förenklas till $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{v}{2u}$ som har allmän lösning $f(u, v) = \frac{1}{2}v\ln(u) + h(v)$ där $h(v)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x, y) får vi:
Svar: $f(x, y) = \frac{1}{2}xy\ln(x^2 + y^{-2}) + h(xy)$.

2. Beräkna integralen (3p)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{2} y \sin\Big(\frac{\pi x^2}{4}\Big) dxdy.$$

Lösning: Vi kan inte hitta en enkel primitiv funktion till $\sin\big(\frac{\pi x^2}{4}\big)$, så vi använder Fubini för att kasta om ordningen. Integrationsområdet kan skrivas om som
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{2}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 2\}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{2} y \sin\Big(\frac{\pi x^2}{4}\Big) dxdy &= \int_0^{2} \int_0^{\sqrt{x}} y \sin\Big(\frac{\pi x^2}{4}\Big) dydx = \int_0^{2} \sin\Big(\frac{\pi x^2}{4}\Big) \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2} \sin\Big(\frac{\pi x^2}{4}\Big) x dx \underset{u=\frac{\pi x^2}{4}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(u) du \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(u)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

3. Låt $F(x,y) = 1 - x^2 - y + y^3$.

(a) Visa att $F(x,y) = 0$ entydigt definierar en envariabelfunktion f, så att $y = f(x)$ i en omgivning av punkten $(x,y) = (1,1)$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 1$ för $f(x)$ från (a)-uppgiften. (3p)

Lösning:

(a) Funktionen $F \in C^1$ och $F(1,1) = 0$. Derivering ger $F'_x(x,y) = -2x$, $F'_y(x,y) = 3y^2 - 1$. I punkten är $F'_y(1,1) = 2 \neq 0$, så implicita funktionssatsen ger att det finns $f \in C^1$, så att kurvan $F(x,y) = 0$ ges av $y = f(x)$ i en omgivning av punkten $(x,y) = (1,1)$.

(b) Baspunkten $(1,1)$ ligger på kurvan, så $f(1) = 1$. Implicita funktionssatsen ger $f'(x) = \dfrac{-F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))} = \dfrac{2x}{3(f(x))^2 - 1}$. Deriverar vi detta får vi

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{2x}{3(f(x))^2 - 1}\Big) = \frac{2(3(f(x))^2 - 1) - 12xf(x)f'(x)}{(3(f(x))^2 - 1)^2}.$$

Stoppar vi in $x = 1$ får vi $f'(1) = 1$ och $f''(1) = -2$. Taylorpolynomet blir
$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 + (x-1) - (x-1)^2 = -1 + 3x - x^2$.

4. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3x^2y + z \\ x^3 + 2y \\ x + 3z^2 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

(b) Beräkna arbetet av $\mathbf{F}$ längs kurvan (1p)

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \sin(t), y = \cos(t), z = t/\pi, 0 \le t \le \pi\}.$$

Lösning:

(a) Om $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ska vara potential till $\mathbf{F}$ måste $\nabla\phi = \mathbf{F}$. För första komponenten innebär det $\phi'_x = 3x^2y + z \Rightarrow \phi = x^3y + xz + C_1(y,z)$, där $C_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en C^1 funktion. Derivering m.a.p. y ger $\phi'_y = x^3 + C'_{1y}(y,z)$. Tillsammans med andra komponenten av potentialekvationen får vi $C'_{1y}(y,z) = 2y \Rightarrow C_1(y,z) = y^2 + C_2(z) \Rightarrow \phi = x^3y + xz + y^2 + C_2(z)$, där $C_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en C^1 funktion. Derivering m.a.p. z ger $\phi'_z = x + C'_2(z)$. Tillsammans med tredje komponenten av potentialekvationen får vi $C'_2(z) = 3z^2 \Rightarrow C_2(z) = z^3 + C$. Konstanten C kan väljas fritt, så för enkelhets skull väljer vi $C = 0$.
Svar: $\mathbf{F} = \nabla\phi$, med $\phi = x^3y + xz + y^2 + z^3$, så $\mathbf{F}$ är konservativt med potential ϕ.

(b) Startpunkten för γ är $\mathbf{a} = \mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och slutpunkten $\mathbf{b} = \mathbf{r}(\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. På grund av att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = 2 - 1 = 1.$$

5. Låt $f(x, y) = -3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{4}y^2$, $g(x, y) = 2(x-2)^2 + (x - \frac{1}{2}y)^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Motivera varför $f(x, y)$ måste anta största och minsta värde på området $g(x, y) \leq 2$ och bestäm dessa. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -3 + 4x + x^2 - y \\ -x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x^2 + 2x - 3 \\ y = 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (x-1)(x+3) \\ y = 2x \end{cases}$. Så vi får de stationära punkterna $(-3, -6)$ och $(1, 2)$.

(b) Hessianen blir $H(x, y) = \begin{bmatrix} 4 + 2x & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. I punkten $(-3, -6)$ får vi $\det(H(-3, -6)) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2 < 0$ vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(-3, -6) = 9$ är en sadelpunkt. I punkten $(1, 2)$ får vi $\det(H(1, 2)) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 > 0$ och första komponenten (6) av $H(1, 2)$ är positiv gör att Hessianen är positivt definit och $f(1, 2) = -5/3$ är en lokal minpunkt.

(c) $g(x, y)$ är en summa av två icke-negativa termer. Vi får därför $(x-2)^2 \leq 1$ och $(x - \frac{1}{2}y)^2 \leq 2$. Den första olikheten ger en begränsning för x. När man har det ger den andra en begränsning för y, så $g(x, y) \leq 2$ är en begränsad mängd. f är kontinuerlig och $g(x, y) \leq 2$ är en kompakt mängd, så största och minsta värde existerar. De lokala extrempunkterna hittade vi i föregående deluppgifter. Vi ser att $g(1, 2) = 2$ och $g(-3, -6) = 50 > 2$, så de punkterna är inte inre punkter. Endast randen $g = 2$ återstår. Lagranges metod ger att max och min endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g = 2$. De är parallella om $0 = \dfrac{d(f, g)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} -3 + 4x + x^2 - y & -x + \frac{1}{2}y \\ -8 + 6x - y & -x + \frac{1}{2}y \end{vmatrix} = (-x + \frac{1}{2}y)\begin{vmatrix} -3 + 4x + x^2 - y & 1 \\ -8 + 6x - y & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(2x - y)(x^2 - 2x + 5)$, men $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$, så $y = 2x$ är enda möjligheten. $2 = g(x, y) = g(x, 2x) = 2(x-2)^2 \Leftrightarrow 0 = (x-2)^2 - 1 = (x-3)(x-1)$. Vi har därför minsta och största värde $f(1, 2) = -5/3$, $f(3, 6) = 9$.

6. Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s, t) = \begin{bmatrix} s\cos(t) \\ s\sin(t) \\ 1 - s^4 \end{bmatrix}$ för $0 \leq s \leq 1$ och $0 \leq t \leq 2\pi$. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ (z-1)^2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm tangentplanet till ytan i punkten $\mathbf{r}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$. (2p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med hjälp av parametriseringen. (3p)

(c) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med Gauss sats. (3p)

Lösning:

(a) En normal till ytan ges av $\mathbf{N}(x,y,z) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ -4s^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s\sin(t) \\ s\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s^4\cos(t) \\ 4s^4\sin(t) \\ s \end{bmatrix}$. I punkten får vi $\mathbf{N}\Big(\mathbf{r}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, så vi kan välja $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som normal. Punkten $\mathbf{r}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\Big) = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big)$ ligger i tangentplanet, så planets ekvation blir $0 = 1(x-1/2) + 1(y-1/2) + 1(z-3/4) \Leftrightarrow x+y+z = 7/4$.

(b) Enhetsnormalen gånger area-elementet blir $\hat{\mathbf{N}}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dsdt = \begin{bmatrix} 4s^4\cos(t) \\ 4s^4\sin(t) \\ s \end{bmatrix} dsdt.$

Den är riktad uppåt på grund av att $s \geq 0$. Flödet blir

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{bmatrix} s\sin(t) \\ s\cos(t) \\ s^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4s^4\cos(t) \\ 4s^4\sin(t) \\ s \end{bmatrix} dsdt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (s^9 + 8s^5\cos(t)\sin(t))dsdt = \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{10} + \tfrac{4}{3}\cos(t)\sin(t))dt = \frac{\pi}{5}.$$

(c) Koordinaterna s och t är polära koordinater i xy-planet. Ytan Y är någon form av rotationssymmetrisk kupa med rand som är en cirkel i xy-planet. Ytan är inte sluten, så vi behöver lägga till en botten-skiva $Y_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, z = 0\}$. I xy-koordinater ges $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, z = 1-(x^2+y^2)^2\}$. Kroppen $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)^2\}$ har rand $\partial K = Y \cup Y_2$. Flödet ut ur K genom Y_2 är nedåt, så normalen till Y_2 är $-\hat{z}$. Flödet genom Y_2 blir pga $z = 0$

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = -\iint_{Y_2} (z-1)^2 dxdy = -\iint_{Y_2} dxdy = -\mu(Y_2) = -\pi.$$

$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2z - 2$ och Gauss sats ger

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}dV = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS$$

$$\Rightarrow \quad \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = \pi + \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}dV = \pi + \iint_{x^2+y^2\leq 1}\int_0^{1-(x^2+y^2)^2} (2z-2)dzdxdy$$

$$= \pi + \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-s^4} (2z-2)sdzdsdt = \pi + 2\pi\int_0^1 (s^8-1)sds$$

$$= \pi + 2\pi\Big(-\frac{2}{5}\Big) = \frac{\pi}{5}.$$

Där vi bytte tillbaka till våra polära koordinater (s,t) med $\frac{d(x,y)}{d(s,t)} = s$.

7. Bestäm massan av en kropp med densitet $\rho = |yz|$ som ockuperar området (4p)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+4y^2+z^2 \leq 4, x^2+4y^2 \leq z^2, z \leq 0, y \geq 0\}$$

Lösning: På grund av gränserna får vi $\rho = -yz$. Byter vi till omskalade sfäriska koordinater får vi

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} = \frac{r^2}{2}\sin\theta drd\theta d\phi.$$

I beräkningen av funktionaldeterminanten kan vi bryta ut en faktor 1/2 från andra raden. Sedan får vi samma determinant som för vanliga sfäriska koordinater. Insättning i gränserna för området ger $r^2 \leq 4, \sin^2\theta \leq \cos^2\theta, \cos\theta \leq 0, \sin\phi \geq 0$, pga $r \geq 0$ och $\sin\theta \geq 0$ alltid gäller för sfäriska koordinater. Detta kan förenklas till $0 \leq r \leq 2$, $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$. Massan ges av

$$M = \iiint_K \rho dxdydz = \frac{-1}{4}\int_0^\pi \int_{3\pi/4}^\pi \int_0^2 r\sin\theta\sin\phi\, r\cos\theta\, r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$= \frac{-1}{4}\Big[-\cos\phi\Big]_0^\pi \Big[\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_{3\pi/4}^\pi \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{-1}{4}2\Big(-\frac{1}{6\sqrt{2}}\Big)\frac{32}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

Svar: Massan är $\dfrac{4\sqrt{2}}{15}$.

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en godtycklig C^1 funktion. Visa att f är differentierbar. (6p)

(b) Antag att Q är en C^1 funktion på $\mathbb{R}^2$ och antag att α, β är C^1 funktioner av en variabel. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$. Visa att

$$\oint_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Detta är en del av beviset för Greens sats, så du får inte använda Greens sats eller någon av dess följdsatser i ditt bevis. (4p)

(c) Definiera begreppet nollmängd i planet. (1p)

(d) Använd en generaliserad dubbelintegral över första kvadranten för att visa (3p)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Lösning:

(a) Se sats 2.2.3 i boken.

(b) Se boken Sats 9.2.1.

(c) En mängd $N \in \mathbb{R}^2$ kallas en nollmängd om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ.

(d) Låt $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, där D är första kvadranten. Fubini ger

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\Big)dy = \Big(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\Big)^2.$$

Observera också att $I \geq 0$ på grund av att $e^{-x^2} > 0$. I polära koordinater ges området av $0 < r$, $0 < \theta < \pi/2$.

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdr.$$

Variabelbytet $u = r^2$ ger $du = 2rdr$ och

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{\pi}{4}\Big[-e^{-u}\Big]_0^\infty = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R}) = \frac{\pi}{4}.$$

Alltså får vi

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{I} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$