MATEMATISKA VETENSKAPER — **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2024-08-27 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl — Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag — 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2024 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Studera variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$

$$u = xy,$$
$$v = \sqrt{x^2-1}\sqrt{1-y^2}.$$

(a) Antag att $a > 1$ och $-1 < b < 1$. Visa att det finns en omgivning av $(x, y) = (a, b)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ till PDE:n (3p)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Lösning:

(a) Funtionaldeterminanten är $\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2-1}} & -\frac{y\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-y^2}} \end{vmatrix} = -\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-y^2}} < 0$ för alla $x > 1$ och $-1 < y < 1$. Inversa funktionssatsen ger därför att variabelbytet är inverterbart i en omgivning av punkten $(x, y) = (a, b)$.

(b) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2-1}}\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = x\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{x^2\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{y^2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-y^2}}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial v}$$

Så PDE:n förenklas till $\frac{\partial f}{\partial v} = v$ som har allmän lösning $f(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + h(u)$ där $h(u)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x, y) får vi:
Svar: $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2-1)(1-y^2) + h(xy)$.

2. (a) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \int_{y^2}^\infty \frac{y^3}{(x^2+y^4)^2}\,dxdy.$$

Glöm inte att motivera dina beräkningar! (3p)

(b) Beräkna $\iint_E (x^4+y)^{1/4}dxdy$ där $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4+y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. (3p)

Lösning:

(a) Integranden är positiv, så vi behöver inte dela upp integralen och vi kan räkna som vanligt. Området ges av $1 < x < \infty$, $1 < y < \sqrt{x}$. Fubini och variabelbytet $t = x^2+y^4$ ger $dt = 4y^3dy$ och

$$\int_1^\infty \int_{y^2}^\infty \frac{y^3}{(x^2+y^4)^2}dxdy = \int_1^\infty \int_1^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{(x^2+y^4)^2}dydx = \frac{1}{4}\int_1^\infty \int_{x^2+1}^{2x^2} \frac{1}{t^2}dtdx$$
$$= \frac{-1}{4}\int_1^\infty \Big(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^2+1}\Big)dx = \Big[\frac{1}{8x} + \frac{1}{4}\arctan x\Big]_{x=1}^\infty = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

(b) Vi använder metoden med nivåkurvor. För varje $u \in [0,1]$ låt

$$E_u = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4+y \leq u, y \geq 0, x \geq 0\},$$

som beskriver området i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = u - x^4$. Arean av E_u är

$$A(u) = \int_0^{u^{1/4}} u - x^4dx = \Big[ux - \frac{u^5}{5}\Big]_0^{u^{1/4}} = \frac{4}{5}u^{5/4}.$$

Integralen blir

$$\iint_E (x^4+y)^{1/4}dxdy = \int_0^1 u^{1/4}A'(u)du = \int_0^1 u^{1/2}du = \frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. Låt $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{då } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ och $g(x,y) = \exp(x-y^2)$

(a) Avgör ifall funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i punkten $(0,0)$. (3p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för $g(x,y)$ i punkten $(x,y) = (1,1)$. (2p)

Lösning:

(a) Vi undersöker först de partiella derivatorna

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2}-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 - \frac{1}{2}h^4 + \mathcal{O}(h^6) - h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0}(-\frac{1}{2}h + \mathcal{O}(h^3)) = 0,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \underset{pss}{=} 0.$$

För differentierbarhet krävs att

$$\rho(h,k) = \frac{f(h,k)-f(0,0)-hf'_x(0,0)-kf'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

går mot 0 då $(h,k) \to (0,0)$. Med $h = r\cos\theta$ och $k = r\sin\theta$ får vi

$$\rho(h,k) = \frac{\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}-1}{r} = \frac{r^2 - \frac{1}{2}r^4 + \mathcal{O}(r^6) - r^2}{r^3} = -\frac{1}{2}r + \mathcal{O}(r^3) \to 0 \text{ då } r \to 0.$$

Alltså är f differentierbar i punkten $(0,0)$.

(b) Gradienten blir $\nabla g(x,y) = e^{x-y^2}\begin{bmatrix}1\\-2y\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla g(1,1) = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. Hessianen blir $H(x,y) = e^{x-y^2}\begin{bmatrix}1 & -2y\\-2y & -2+4y^2\end{bmatrix} \Rightarrow H(1,1) = \begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}$. Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned} P(h,k) &= g(1,1) + \nabla g(1,1)\cdot\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix} H(1,1)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} \\ &= 1 + h - 2k + \frac{1}{2}(h^2 - 4hk + 2k^2). \end{aligned}$$

4. Den parametriserade kurvan

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t(1-t) \\ -t^3+3t^2-1 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1$$

går i en båge från $(0,-1)$ till $(0,1)$. Använd Greens sats för att beräkna arean av området mellan denna kurva och y-axeln. (4p)

Lösning: Låt γ_1 beteckna kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t(1-t) \\ -t^3+3t^2-1 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1$$

och låt γ_2 vara linjestycket från $(0,-1)$ till $(0,1)$ med $t = y$ som parametrer. Observera att $t(1-t) \ge 0$, så γ_1 ligger till höger om y-axeln. Vi vill beräkna arean av området D som har orienterad rand $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$. Då är arean av D

$$\mu(D) = \iint_D 1dxdy = \iint_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ på grund av att $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ där. Arean kan därför beräknas till

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \begin{bmatrix}0\\t-t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-2t\\-3t^2+6t\end{bmatrix}dt \\ &= \int_0^1 6t^2 - 9t^3 + 3t^4 dt = \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

5. Låt $f(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - y^2 - \frac{3}{2}x^2$ och $g(x,y) = y - x^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (1p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Minimera om möjligt $f(x,y)$ på området som ges av $g(x,y) \ge 0$. Motivera existens eller icke-existens av minpunkt. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix}-3x\\-2y+2y^2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = x\\0 = y(y-1)\end{cases}$.

Därför är de stationära punkterna $(0,0)$ och $(0,1)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & -2+4y\end{bmatrix}$. I punkten $(0,0)$ får vi $\det(H(0,0)) = \begin{vmatrix}-3 & 0\\0 & -2\end{vmatrix} = 6 > 0$ och första komponenten (-3) är negativ vilket innebär att Hessianen är negativt definit och $f(0,0) = 0$ är en lokal maxpunkt. I punkten $(0,1)$ får vi $\det(H(0,1)) = \begin{vmatrix}-3 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} = -6 < 0$ gör att vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(0,1) = -\frac{1}{3}$ är en sadelpunkt.

(c) Området $g(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$ är området ovanför parabeln $y = x^2$. Området är obegränsat, men $f(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - y^2 - \frac{3}{2}x^2 \geq \frac{2}{3}y^3 - y^2 - \frac{3}{2}y \to \infty$ då $y \to \infty$, så det existerar en konstant K så att $f(x,y) > f(0,0) = 0$ för alla $y \geq K$. Därför kan minpunkt bara finnas på det kompakta området $D = \{(x,y)|g(x,y) \geq 0, y \geq K\}$. Målfunktionen f är kontinuerlig och D är kompakt så minpunkt existerar. Vi har inga inre stationära punkter på grund av att $(0,0)$ ligger på randen och $(0,1)$ är en sadelpunkt. Minpunkt kan inte finnas på $y = K$, så det återstår att minimera f på $g(x,y) = 0$. Lagranges metod ger min endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g = 0$. De är parallella om $0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -3x & -2y+2y^2 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = -3x - 4xy + 4xy^2 = 4x(y - \frac{3}{2})(y + \frac{1}{2})$, men $y = x^2 \geq 0$, så $y = -1/2$ ger ingen lösning. Vi får kandidaterna $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$ som har funktionsvärden $f(0,0) = 0$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

Svar: f antar minsta värde i $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.

6. Låt $Y = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 1\}$ och låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ -3z^2 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med Gauss sats. (4p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med direkt parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) Ytan är en del av en kon. Lägg till en bottenyta Y_b och toppyta Y_t

$$\begin{aligned} Y_b &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\} \\ Y_t &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, z = 1\} \end{aligned}$$

Tillsammans med Y begränsar de en kropp

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 - z\}$$

med $\partial K = Y \cup Y_b \cup Y_t$. Byter vi till cylindriska koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ får vi $dV = dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ och K ges av olikheterna $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 2 - z$. Gauss sats och $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y - 6z$ ger

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_0^1 \int_0^{2-z} \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi - 6z)\rho d\varphi d\rho dz \\ &= -12\pi \int_0^1 \int_0^{2-z} z\rho d\rho dz = -6\pi \int_0^1 (2-z)^2 z dz = \frac{-11}{2}\pi \end{aligned}$$

Ytan Y_b har utåtriktad normal $\hat{N} = -\hat{z}$ och ytan Y_t har utåtriktad normal $\hat{N} = \hat{z}$. Normalen till Y skulle vara riktad uppåt, vilket också ger utåtriktad normal. Observera att $z = 0$ på Y_b och $z = 1$ på Y_t.

$$\begin{aligned} \frac{-11}{2}\pi &= \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{Y_b} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{Y_t} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS \\ &= \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + 0 - 3\int_{Y_t} dS. \end{aligned}$$

Y_t är en halv cirkelskiva med radie 1 och area π, så flödet upp genom Y blir

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \frac{-11\pi}{2} + 3\pi = \frac{-5\pi}{2}.$$

(b) Ytan kan parametriseras med $\mathbf{r}(\rho,\varphi)=\begin{bmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 2-\rho\end{bmatrix}$ då $1\le\rho\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

$$\hat{N}dS=\pm\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}=\pm\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}=\pm\rho\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 1\end{bmatrix}.$$

Då vi skulle mäta flödet upp genom ytan väljer vi + tecknet så z komponenten blir positiv. Flödet blir

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho\begin{bmatrix}\rho^2\cos^2\varphi\\ \rho^2\sin^2\varphi\\ -3(\rho-2)^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 1\end{bmatrix}d\rho d\varphi\\ &=\int_1^2\int_0^{2\pi}(\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi-3(\rho-2)^2\rho)d\varphi d\rho\\ &=-6\pi\int_1^2(\rho-2)^2\rho d\rho=\frac{-5\pi}{2}.\end{aligned}$$

7. Bestäm masscentrum för en kropp med densitet $\rho=z^3$ som ockuperar området (4p)

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\ge 0, x^2+2y^2+4z^2\le 4\}$$

Lösning: Koordinatbytet

$$\begin{cases}x=2r\sin\theta\cos\phi\\ y=\sqrt{2}r\sin\theta\sin\phi\\ z=r\cos\theta\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}=2\sqrt{2}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

på grund av att det är en omskalning av sfäriska koordinater. I dessa koordinater ges området av $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\pi/2$, $0\le\phi\le 2\pi$. Massan ges av

$$\begin{aligned}M=\iiint_K\rho dxdydz&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos^3\theta\,2\sqrt{2}r^2\sin\theta drd\theta d\phi\\ &=4\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin\theta d\theta\underset{u=\cos\theta}{=}-\tfrac{2}{3}\sqrt{2}\pi\int_1^0 u^3du=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Masscentrum ligger i (m_x,m_y,m_z) där

$$m_x=\frac{1}{M}\iiint_K x\rho dxdydz,\quad m_y=\frac{1}{M}\iiint_K y\rho dxdydz,\quad m_z=\frac{1}{M}\iiint_K z\rho dxdydz.$$

Området och densiteten är symmetriska under speglingarna $x\to -x$ och $y\to -y$, så $m_x=0$ och $m_y=0$. Med ovanstående koordinatbyte får vi

$$\begin{aligned}m_z&=\frac{3\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos^4\theta\,2\sqrt{2}r^2\sin\theta drd\theta d\phi\\ &=\tfrac{24}{7}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta d\theta\underset{u=\cos\theta}{=}-\tfrac{24}{7}\int_1^0 u^4du=\frac{24}{35}\end{aligned}$$

Svar: Masscentrum ligger i punkten $(0,0,24/35)$.

8. (a) Antag att f och g är skalärvärda funktioner av två variabler av klass C^1 och att (a,b) är en inre punkt i D_f och D_g som löser problemet att minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=0$. Visa att ∇f och ∇g är parallella. (5p)

(b) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^2 i en omgivning av en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
Bevisa att $f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a})$. (5p)

(c) Definiera vad som menas med att $\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ är en *trappfunktion.* (2p)

Lösning:

(a) Se beviset av sats 4.3.1 i boken.

(b) Se beviset av Clairauts sats på kurshemsidan eller sida 87 i boken.

(c) Se avsnitt 6.1 i boken.

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$