MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel
Datum: 2024-06-04 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2024 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna integralen (3p)

$$\int_0^1 \int_x^1 x\sqrt{y^2 - x^2}\,dydx.$$

(b) Låt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna integralen (3p)

$$\iint_\Omega (2x + y)^2 dxdy$$

Lösning:

(a) Fubini ger att vi kan kasta om integrationsordningen på området $0 \leq x \leq y \leq 1$.

$$I = \int_0^1 \int_x^1 x\sqrt{y^2 - x^2}\,dydx = \int_0^1 \int_0^y x\sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy$$

Variabelbytet $u = y^2 - x^2$ ger $du = -2xdx$ och $x = 0 \leftrightarrow u = y^2$, $x = y \leftrightarrow u = 0$. Så

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{y^2}^0 \sqrt{u}\,dudy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{u=0}^{y^2} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{12}.$$

(b) Inför koordinater (r, φ) så att $x = r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$. $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$ och $4 \geq 4x^2 + y^2 = 4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi = 4r^2 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1$, så Ω ges av $0 \leq \varphi \leq \pi$ och $0 \leq r \leq 1$.

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{vmatrix} = 2r\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi = 2r$$

Så $dxdy = 2rdrd\varphi$ och integranden blir $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 = 4r^2 + 8r^2\cos\varphi\sin\varphi$. Integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (2x + y)^2 dxdy &= \int_0^1 \int_0^\pi (4r^2 + 8r^2\cos\varphi\sin\varphi)2rd\varphi dr \\ &= \int_0^1 8r^3 dr \Big[\varphi + \sin^2\varphi\Big]_0^\pi = \pi\Big[2r^4\Big]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

2. Låt $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ och låt $g(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + y^3 - xyz + 2z^2$.

(a) Avgör ifall funktionen $f(x, y)$ är differentierbar i punkten $(0, 0)$. (2p)

(b) Motivera varför ekvationen $g(x,y,z)=3$ definierar en implicit funktion $y=h(x,z)$ i en omgivning av $(2,1,1)$ och bestäm h'_x och h'_z i punkten. (2p)

Lösning:

(a) Vi undersöker först de partiella derivatorna

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\\ f'_y(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0. \end{aligned}$$

För differentierbarhet krävs att

$$\rho(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf'_x(0,0)-kf'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

går mot 0 då $(h,k)\to(0,0)$. Med $h=r\cos\theta$ och $k=r\sin\theta$ får vi

$$\rho(h,k)=\frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}=r\cos^2\theta\sin^2\theta\to 0 \text{ då } r\to 0.$$

Alltså är f differentierbar i punkten $(0,0)$.

(b) $g(2,1,1)=3$, och $g'_y=-\frac{x}{y^2}+3y^2-xz \Rightarrow g'_y(2,1,1)=-1\neq 0$, så implicita funktionssatsen ger att det existerar en omgivning U av $(2,1,1)$ och och en funktion $h(x,z)$ så att $y=h(x,z)$ uppfyller $g(x,y,z)=2$ på U. Satsen ger också $h'_x(2,1)=\dfrac{-g'_x(2,1,1)}{g'_y(2,1,1)}=0$ och $h'_z(2,1)=\dfrac{-g'_z(2,1,1)}{g'_y(2,1,1)}=2$.

3. Studera variabelbytet $(x,y)\leftrightarrow(u,v)$ med $u=x^2-\sqrt{y}$ och $v=2x+y$.

(a) Avgör ifall variabelbytet är giltigt i punkten $(x,y)=(-1,\frac{1}{4})$. (1p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x>0$, $y>0$ till PDE:n (3p)

$$f'_x+4x\sqrt{y}f'_y=\frac{1+2x\sqrt{y}}{(2x+y)^2}$$

Lösning:

(a) Funtionaldeterminanten är $\begin{vmatrix} 2x & -\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2x+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. I punkten $(-1,\frac{1}{4})$ är determinanten 0, så variabelbytet är inte giltigt där. (Om en lokal invers skulle existera skulle inte alla dess partiella derivator existera pga $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$.)

(b) Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$\begin{aligned} \frac{1+2x\sqrt{y}}{(2x+y)^2} &= 2x\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{\partial f}{\partial v}+4x\sqrt{y}\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= 2(1+2x\sqrt{y})\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Så PDE:n förenklas till $\dfrac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{2}v^{-2}$ som har allmän lösning $f(u,v)=-\frac{1}{2}v^{-1}+h(u)$ där $h(u)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x,y) får vi:

Svar: $f(x,y)=-\dfrac{1}{2(2x+y)}+h(x^2-\sqrt{y})$.

4. Låt $f(x,y) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - y + xy + \frac{1}{2}y^2$, $g(x,y) = 1 + x^2 - 2y + y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y)$ på området som ges av $g(x,y) \leq 6$. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} x - x^2 + y \\ x + y - 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x - x^2 + y \\ y = 1 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (x-1)(x+1) \\ y = 1 - x \end{cases}$. Så vi får de stationära punkterna $(-1,2)$ och $(1,0)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. I punkten $(-1,2)$ får vi $\det(H(-1,2)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ och första komponenten (3) av $H(-1,2)$ är positiv gör att Hessianen är positivt definit. Därför är $f(-1,2) = -\frac{11}{3}$ är en lokal minpunkt. I punkten $(1,0)$ får vi $\det(H(1,0)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$ så Hessianen är indefinit och $f(1,0) = -\frac{7}{3}$ är en sadelpunkt.

(c) Vi ser att $g(-1,2) = 2 < 6$ och $g(1,0) = 2 < 6$, så de stationära punkterna ligger i det inre av området. Lagranges metod ger att extrempunkter på randen endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g = 6$. De är parallella om $0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} x - x^2 + y & -1 + x + y \\ 2x & -2 + 2y \end{vmatrix} = 2y(y - 1 - x^2)$. Alltså $y = 0$ eller $y = 1 + x^2$. Sätter vi in $y = 0$ i $g(x,y) = 6$ får vi $x^2 = 5$, dvs punkterna $(\pm\sqrt{5}, 0)$. Sätter vi in $y = 1 + x^2$ får vi $0 = x^4 + x^2 - 6 = (x^2+3)(x^2-2)$, men $x^2 + 3 > 0$, så vi får $x^2 = 2$, dvs punkterna $(\pm\sqrt{2}, 3)$. Vi har kandidaterna $f(-1,2) = -\frac{11}{3}$, $f(1,0) = -\frac{7}{3}$, $f(\sqrt{2},3) = \frac{7}{3}\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2},3) = -\frac{7}{3}\sqrt{2}$, $f(\sqrt{5},0) = -\frac{5}{3}\sqrt{5}$, $f(-\sqrt{5},0) = \frac{5}{3}\sqrt{5}$. Vi har att $(7\sqrt{2})^2 = 98$, $11^2 = 121$ och $(5\sqrt{5})^2 = 125$, så $7\sqrt{2} < 11 < 5\sqrt{5}$. Vi får därför största värde $f(-\sqrt{5},0) = \frac{5}{3}\sqrt{5}$ och minsta värde $f(\sqrt{5},0) = -\frac{5}{3}\sqrt{5}$.

5. Låt γ vara kurvan i planet som ges av $\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta \\ (1+\sin\theta)\cos\theta \end{bmatrix}$ för $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

(a) Vad innebär det geometriskt att en kurva är enkel. (1p)

(b) Kurvan γ är sluten, enkel och begränsar ett område i planet. Använd Greens formel för ett väl valt vektorfält för att beräkna arean av området som begränsas av γ. (4p)

(c) Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ längs γ där $\Phi(x,y) = \cos x + \ln(2 + \sin y)$. (1p)

Lösning:

(a) En kurva är enkel om den inte korsar eller tangerar sig själv. Start- och ändpunkt tillåts dock vara samma punkt.

(b) Låt D vara området som begränsas av γ, så $\partial D = \gamma$. Parametriseringen ger $\mathbf{r}'(\theta) = \begin{bmatrix} -2\cos\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta - \sin\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$. Låter vi $P = -y$, $Q = 0$ ger Greens formel

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_\gamma P dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin\theta)\cos\theta\cos\theta\sin\theta d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta) d\theta$$

Den första termen ger inget bidrag pga symmetri. För den andra termen använder vi omskrivningen $\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))\frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi)) = \frac{1}{4}(1-\cos^2(2\varphi)) = \frac{1}{4}\sin^2(2\varphi) = \frac{1}{8}(1-\cos(4\varphi))$. Så

$$\mu(D) = \frac{1}{4}\Big[\theta - \sin(4\varphi)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Fältet är konservativt och kurvan är sluten, så arbetet blir 0.

6. Låt $Y = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2, z \geq 0, y \geq 0\}$ och låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med Gauss sats. (3p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med direkt parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) Ytan är en del av en sfär. Lägg till en bottenyta Y_b och sidoyta Y_s

$$Y_b = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 2, z = 0\}$$
$$Y_s = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 2, y = 0\}$$

Tillsammans med Y begänsar de en kropp

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq 0, y \geq 0\}$$

med $\partial K = Y \cup Y_b \cup Y_s$. Byter vi till sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ får vi $dV = dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ och K ges av olikheterna $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi$. Gauss sats och $\nabla\cdot\mathbf{F} = 3$ ger

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} 3r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$= 3\pi\Big[-\cos\theta\Big]_{r=0}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{\sqrt{2}} dz = 2\sqrt{2}\pi$$

Ytan Y_b har utåtriktad normal $\hat{N} = -\hat{z}$ och ytan Y_s har utåtriktad normal $\hat{N} = -\hat{y}$. Normalen till Y skulle vara riktad uppåt, vilket också ger utåtriktad normal.

$$2\sqrt{2}\pi = \iint_{\partial K}\mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{Y_b}\mathbf{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{Y_s}\mathbf{F}\cdot\hat{N}dS$$
$$= \iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{Y_b}\sqrt{2}dS + \iint_{Y_s} 0dS.$$

Y_b är en halv cirkelskiva med radie $\sqrt{2}$, så flödet upp genom Y blir

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS = -\sqrt{2}\mu(Y_b) + 2\sqrt{2}\pi = -\pi\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi = \sqrt{2}\pi$$

(b) Ytan kan parametriseras med $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin\theta\cos\phi \\ \sqrt{2}\sin\theta\sin\phi \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{bmatrix}$ då $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

$$\hat{N}dS = \pm\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = \pm 2\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0\end{bmatrix} = \pm 2\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Då vi skulle mäta flödet upp genom ytan väljer vi + tecknet så z komponenten blir positiv. Flödet blir

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot \hat{N} dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} 2\sqrt{2}\sin\theta \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta - 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{bmatrix} d\theta d\phi\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2}\sin\theta\big(1-\cos\theta\big)d\theta d\phi\\ &= \pi 2\sqrt{2}\Big[-\cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

7. Låt $f(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \cos(t-2x)\ln(t)dt$. Bestäm en rationell funktion $q(x)$, så att för $x > 0$ gäller (4p)

$$f''(x) + 4f(x) = q(x).$$

Lösning: Integranden $g(x,t) = \cos(t-x)\ln(t)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$\begin{aligned}g(x,2x) &= \ln(2x), \qquad g'_x(x,t) = 2\sin(t-2x)\ln(t),\\ f'(x) &= \int_1^{2x} g'_x(x,t)dt + g(x,2x)\frac{d}{dx}(2x) = \int_1^{2x} 2\sin(t-2x)\ln(t)dt + 2\ln(2x).\end{aligned}$$

Om vi låter $h(x,t) = 2\sin(t-2x)\ln(t)$, får vi på samma sätt

$$\begin{aligned}h(x,2x) &= 0, \qquad h'_x(x,t) = -4\cos(t-2x)\ln(t),\\ f''(x) &= \int_1^{2x} h'_x(x,t)dt + h(x,2x)\frac{d}{dx}(2x) + 2\frac{d}{dx}(\ln(2x))\\ &= -4\int_1^{2x}\cos(t-2x)\ln(t)dt + \frac{2}{x} = -4f(x) + \frac{2}{x}.\end{aligned}$$

Svar: $q(x) = \dfrac{2}{x}$.

8. (a) Bevisa Taylors formel av ordning 2 för en skalärvärd funktion av två variabler av klass C^3 utgående från motsvarande envariabel-resultat.
Uttryck resttermen med derivator, ej $\mathcal{O}$-notation. (5p)

(b) Låt $B_{n,r} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \le r\}$. Härled en formel för volymen $\mu(B_{n,1})$ av det n-dimensionella enhetsklotet för $n \ge 3$ uttryckt i $\mu(B_{n-2,1})$. Du får använda dig av resultatet $\mu(B_{n,r}) = r^n\mu(B_{n,1})\ \forall\ n \ge 1$ utan att bevisa det. (6p)

(c) Definiera begreppet *virvelfritt* vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

Lösning:

(a) Vi vill Taylor-utveckla $f(x,y) \in C^3$ kring (a,b). Fixera (h,k) och låt $F(t) = f(a + th, b+tk) \in C^3$. Taylorutveckling av F kring $t = 0$ ger

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + F''(\xi)\frac{t^3}{3!},$$

för något ξ mellan 0 och t. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{d}{dt}(f(a+th, b+tk)) = f'_x(a+th,b+tk)h + f'_y(a+th,b+tk)k\\ &= ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f)(a+th, b+tk)\end{aligned}$$

F' och $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f$ har samma relation som F och f, så vi kan upprepa och få

$$F^{(i)}(t) = ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^i f)(a + th, b + tk)$$

Sätter vi $t = 1$ i Taylorutvecklingen får vi

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\xi) \\
&= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f)(a,b) \\
&\quad + ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f)(a + \xi h, b + \xi k) \\
&= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f''_x x(a,b) + 2hkf''_x y(a,b) + k^2 f''_y y(a,b)) \\
&\quad + \Big(\Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^3 f\Big)(a + \xi h, b + \xi k),
\end{aligned}$$

för något $0 \le \xi \le 1$.

(b) Låt $\mu_n = \mu(B_{n,1})$. Låt $\mathbf{x} \in B_{n,1}$. Separerar vi de två högsta komponenterna får vi $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1 \Leftrightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \le 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$. Fixearar vi $x_1, \ldots, x_{n-2}$ blir detta en 2-dimensionell cirkelskiva K med radie $\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och area $\pi(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2)$. Projektionen av $B_{n,1}$ på $x_1, \ldots, x_{n-2}$-planet blir $B_{n-2,1}$ så Fubini ger

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \int_{B_n} dx_1 \cdots dx_n = \int_{B_{n-2}} (\iint_K dx_{n-1} dx_n) dx_1 \cdots dx_{n-2} \\
&= \pi \int_{B_{n-2}} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2) dx_1 \cdots dx_{n-2}.
\end{aligned}$$

Låt $g(x_1, \ldots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$, dvs $n-2$ dimensionell norm. I klotet $B_{n-2,1}$ är $0 \le g \le 1$ och $0 \le g \le u$ ger klotet $B_{n-2,u}$ som har volym $V(u) = \mu(B_{n-2,u}) = u^{n-2}\mu(B_{n-2,1}) = u^{n-2}\mu_{n-2}$. Metoden med nivåytor ger

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \pi \int_0^1 (1 - u^2) V'(u) du = \pi \int_0^1 (1 - u^2)(n-2) u^{n-3} \mu_{n-2} du \\
&= \pi \mu_{n-2} (n-2) \Big[\frac{u^{n-2}}{n-2} - \frac{u^n}{n}\Big]_0^1 = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}.
\end{aligned}$$

Alltså $\mu(B_{n,1}) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2,1})$.

(c) Ett vektorfält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är virvelfritt om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),\\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), & \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).
\end{aligned}
$$

Primitiva funktioner

$$
\begin{aligned}
&\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, && \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\\
&\int \sin x dx = -\cos x + C, && \int \cos x dx = \sin x + C,\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, && \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,\\
&\int e^x dx = e^x + C, && \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, && \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,\\
&\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, && \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,\\
& && \int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,\\
&\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, && I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.
\end{aligned}
$$

Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\\
\sin x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,\\
\arctan x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,\\
\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.
\end{aligned}
$$