MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2024-03-12 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Tentamen 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2024 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna $\iint_D 4x^2y + y^3 dxdy$ där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 < 4,\ 2x + y > 0\}$. (3p)

(b) Beräkna $\iint_E \cos((x^2 + y)^{3/2})dxdy$ där $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. (3p)

2. Låt $f(x, y) = 2\ln(x + 2y)$ och $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{y} - xyz + z^2$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 för $f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1,\ 1/2)$. (2p)

(b) Motivera varför ekvationen $g(x, y, z) = 5$ definierar en implicit funktion $x = h(y, z)$ i en omgivning av $(2, 1, 1)$. (1p)

3. Studera variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$, $u = \sin(x - y)$, $v = \sin(x + y)$.

(a) Använd generell teori för att visa att variabelbytet är inverterbart i någon omgivning av $(x, y) = (0, 0)$ och explicit beräkning av inversen för att beskriva den största omgivningen. Jämför teorin och beräkningen. (3p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x, y)$ till PDE:n. (3p)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 4\tan(x + y).$$

4. Låt

$$f(x, y) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + y + xy + \tfrac{1}{2}y^2, \qquad g(x, y) = x + x^2 + y + xy + \tfrac{1}{2}y^2.$$

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y)$. (1p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

(c) Bestäm största och minsta värde av $f(x, y)$ på nivåkurvan $g(x, y) = 4$. (3p)

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och beskriv ekvipotentialkurvorna till $\mathbf{F}$, dvs höjdkurvorna för potentialen. (3p)

(b) Beräkna arbetet av $\mathbf{F}$ längs $\gamma = \{(x, y) \,|\, x = t^2\sin(t), y = (t + \pi)\cos(t), -\pi \leq t \leq \pi\}$. (2p)

6. Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s,t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s^2 - t \\ s + \frac{1}{2}t^2 \\ -st \end{bmatrix}$ för $-1 < s < t < 1$.

(a) Bestäm tangentplanet till ytan i punkten $\mathbf{r}(-1/2, 1/2)$. (2p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$ upp genom Y. (3p)

(c) Beräkna arbetet av $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} y \\ x - zx \\ y \end{bmatrix}$ ett varv längs randen ∂Y med positiv orientering. (3p)

7. En kropp ockuperar området

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 \leq z, y^2 \leq z \leq 2\}$$

och har densitet $\rho(x,y,z) = x + 2$. Beräkna kroppens massa. (3p)

8. (a) Antag att $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbara överallt. Härled formeln för derivatan av sammansättningen $f \circ \mathbf{g}$. (6p)

(b) Antag att $D \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (y,z) \in E,\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$, $E \in \mathbb{R}^2$ är kompakt och $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$, $P : D \to \mathbb{R}$ och att α, β, P är av klass C^1. Visa att

$$\iint_{\partial D} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} dx dy.$$

Detta är en del av beviset för Gauss sats, så du får inte använda Gauss sats eller någon av dess följdsatser i ditt bevis. (5p)

(c) Definiera vad som menas med att en mängd $D \in \mathbb{R}^2$ är *kvadrerbar*. (1p)

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Thomas Bäckdahl
Lösningsförslag

Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel
Datum: 2024-03-12 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2024 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna $\iint_D 4x^2y + y^3 dxdy$ där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 4,\ 2x + y > 0\}$. (3p)

(b) Beräkna $\iint_E \cos((x^2 + y)^{3/2}) dxdy$ där $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. (3p)

Lösning:

(a) Variabelbytet $x = r\cos\theta, y = 2r\sin\theta$ ger

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2r.$$

Området avbildas på $E = \{(r,\theta) \mid 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta < 4, 2r\sin\theta + 2r\cos\theta > 0\} = \{(r,\theta) \mid 0 < r < 1, \sin\theta + \cos\theta > 0\} = \{(r,\theta) \mid 0 < r < 1, -\pi/4 < \theta < 3\pi/4\}$.

$$\iint_D 4x^2y + y^3 dxdy = \iint_E 4r^2\, 2r\, \sin\theta\, 2r\, drd\theta = 16\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

(b) Vi använder metoden med nivåkurvor. För varje $u \in [0, 1]$ låt

$$E_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \leq u, y \geq 0, x \geq 0\},$$

som beskriver området i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = u - x^2$. Arean av E_u är

$$A(u) = \int_0^{\sqrt{u}} u - x^2 dx = \Big[ux - \frac{u^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}u^{3/2}.$$

Integralen blir

$$\iint_E \cos((x^2 + y)^{3/2}) dxdy = \int_0^1 \cos(u^{3/2}) A'(u) du = \int_0^1 \cos(u^{3/2})\sqrt{u} du$$
$$\underset{t=u^{3/2}}{=} \frac{2}{3}\int_0^1 \cos(t) dt = \frac{2}{3}\Big[\sin(t)\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\sin(1).$$

2. Låt $f(x, y) = 2\ln(x + 2y)$ och $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{y} - xyz + z^2$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 för $f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1,\ 1/2)$. (2p)

(b) Motivera varför ekvationen $g(x, y, z) = 5$ definierar en implicit funktion $x = h(y, z)$ i en omgivning av $(2, 1, 1)$. (1p)

Lösning:

(a) Gradienten blir $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{x+2y}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ och Hessianen blir $H(x,y) = \dfrac{-1}{(x+2y)^2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$.
I punkten får vi $\nabla f(1,1/2) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ och $H(1,1/2) = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$. Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned} P(h,k) &= f(1,1/2) + \nabla f(1,1/2)\cdot\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix} H(1,1/2)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} \\ &= 2\ln(2) + h + 2k + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}h^2 - 2hk - 2k^2). \end{aligned}$$

(b) $g(2,1,1) = 5$ och $g'_x(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{y} - yz \Rightarrow g'_x(2,1,1) = 6 \neq 0$ så implicita funktionssatsen ger att $g(x,y,z) = 5$ definierar en implicit funktion $x = h(y,z)$ i en omgivning av punkten.

3. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$, $u = \sin(x-y)$, $v = \sin(x+y)$.

(a) Använd generell teori för att visa att variabelbytet är inverterbart i någon omgivning av $(x,y) = (0,0)$ och explicit beräkning av inversen för att beskriva den största omgivningen. Jämför teorin och beräkningen. (3p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ till PDE:n. (3p)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 4\tan(x+y).$$

Lösning:

(a) Funtionaldeterminanten är $J = \begin{vmatrix}\cos(x-y) & -\cos(x-y)\\ \cos(x+y) & \cos(x+y)\end{vmatrix} = 2\cos(x-y)\cos(x+y)$.
I punkten är $J \neq 2 \neq 0$ så, inversa funktionssatsen ger därför att variabelbytet är inverterbart i en omgivning av den givna punkten. Vi ser att $J = 0$ då $x - y = \pm\pi/2$ eller $x + y = \pm\pi/2$ så på de linjerna kan bytet inte fungera. Låt

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 < x-y < \pi/2, -\pi/2 < x+y < \pi/2\}.$$

Detta är en kvadrat vriden 45°. Vi har att $J > 0$ om $(x,y)\in D$. Teorin ger bara lokal inverterbarhet kring varje punkt i D, men sin är inverterbar på $(-\pi/2, \pi/2)$ så $x-y = \arcsin(u), x+y = \arcsin(v) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arcsin(v) + \frac{1}{2}\arcsin(u), y = \frac{1}{2}\arcsin(v) - \frac{1}{2}\arcsin(u)$. Detta ger att variabelbytet är inverterbart på hela D.

(b) Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = \cos(x-y)\frac{\partial f}{\partial u} + \cos(x+y)\frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = -\cos(x-y)\frac{\partial f}{\partial u} + \cos(x+y)\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$\begin{aligned} &4\tan(x+y) = 2\cos(x+y)\frac{\partial f}{\partial v} \\ \Rightarrow\quad &\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos^2(x+y)} = \frac{2\sin(x+y)}{1-\sin^2(x+y)} = \frac{2v}{1-v^2}. \end{aligned}$$

Partialbråksuppdelning ger $\dfrac{2v}{1-v^2} = \dfrac{1}{1-v} - \dfrac{1}{1+v}$ så

$$f(u,v) = -\ln(1+v) - \ln(1-v) + h(u) = -\ln(1-v^2) + h(u)$$

där $h(v)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x,y) får vi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\ln(1-\sin^2(x+y)) + h(\sin(x-y)) = -\ln(\cos^2(x+y)) + h(\sin(x-y)) \\ &= -2\ln(\cos(x+y)) + g(x-y), \end{aligned}$$

där $g(z) = h(\sin(z))$.
Svar: $f(x,y) = -2\ln(\cos(x+y)) + g(x-y)$ där $g \in C^1(\mathbb{R})$ är en godtycklig funktion.

4. Låt

$$f(x,y) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + y + xy + \tfrac{1}{2}y^2, \qquad g(x,y) = x + x^2 + y + xy + \tfrac{1}{2}y^2.$$

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (1p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

(c) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y)$ på nivåkurvan $g(x,y) = 4$. (3p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}x^2 + y \\ 1 + x + y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}x^2 - x \\ y = -1 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x(x-2) \\ y = -1 - x \end{cases}$. Så vi får de stationära punkterna $(0,-1)$ och $(2,-3)$.

(b) Hessianen blir och $H(x,y) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dess determinant blir $\det(H(x,y)) = x - 1$. I punkten $(0,-1)$ får vi $\det(H(0,-1)) = -1 < 0$ vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(0,-1) = -\frac{1}{2}$ är en sadelpunkt. I punkten $(2,-3)$ får vi $\det(H(2,-3)) = 1 > 0$ och första komponenten (2) av $H(2,-3)$ är positiv gör att Hessianen är positivt definit och $f(2,-3) = -\frac{7}{6}$ är en lokal min-punkt.

(c) Lagranges metod ger att max och min endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g = 4$. De är parallella om

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}x^2 + y & 1 + x + y \\ 1 + 2x + y & 1 + x + y \end{vmatrix} = (1 + x + y) \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}x^2 + y & 1 \\ 1 + 2x + y & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 + x + y)(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x) = \tfrac{1}{2}(1 + x + y)x(x - 4) \end{aligned}$$

Vi får $x = 0$, $x = 4$ eller $x = -1 - y$. För fallet $x = 0$ får vi $4 = g(x,y) = g(0,y) = y + \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow 0 = y^2 + 2y - 8 = (y+4)(y-2)$ så vi får kandidater $f(0,-4) = 4$ och $f(0,2) = 4$. För fallet $x = 4$ får vi $4 = g(x,y) = g(4,0) = \frac{1}{2}y^2 + 5y + 20 \Rightarrow 0 = y^2 + 10y + 32 = (y+5)^2 + 7$ som saknar lösning. För fallet $x = -1 - y$ får vi $4 = g(x,y) = g(-1-y, y) = y + \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow 0 = y^2 + 2y - 8 = (y-2)(y+4)$ så vi får kandidater $f(-3,2) = -19/2$ och $f(3,-4) = -1/2$. Jämförelse ger att största och minsta värde är $f(0,-4) = f(0,2) = 4$ respektive $f(-3,2) = -19/2$.

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och beskriv ekvipotentialkurvorna till $\mathbf{F}$, dvs höjdkurvorna för potentialen. (3p)

(b) Beräkna arbetet av $\mathbf{F}$ längs $\gamma = \{(x,y) \,|\, x = t^2\sin(t), y = (t+\pi)\cos(t), -\pi \le t \le \pi\}$. (2p)

Lösning:

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt om det finns $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $\nabla\phi = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi'_x = x^3 + xy^2 \\ \phi'_y = x^2y + y^3 \end{cases}$.

Integrerar vi första ekvationen får vi $\phi = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$ där $g \in C^1$. Sätter vi in detta i andra ekvationen får vi $x^2y + y^3 = \phi'_y = x^2y + g'(y) \Leftrightarrow g'(y) = y^3 \Leftrightarrow g(y) = \frac{1}{4}y^4 + C_1$. Alltså $\phi = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + C_1 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + C_1$ är en potential. Därmed är $\mathbf{F}$ konservativt. Ekvipotentialkurvorna ges av $\phi = C \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 = C - C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{C - C_1}$ om $C - C_1 > 0$. Dvs de är cirklar med centrum i origo.

(b) Start och slutpunkt för γ är $(0,0)$ respektive $(0,-2\pi)$. Fältet är konservativt, så arbetet blir

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,-2\pi)-\phi(0,0) = \frac{1}{4}(2\pi)^4 = 4\pi^4.$$

6. Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta som parametriseras av $\mathbf{r}(s,t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s^2 - t \\ s + \frac{1}{2}t^2 \\ -st \end{bmatrix}$ för $-1 < s < t < 1$.

(a) Bestäm tangentplanet till ytan i punkten $\mathbf{r}(-1/2, 1/2)$. (2p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$ upp genom Y. (3p)

(c) Beräkna arbetet av $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} y \\ x - zx \\ y \end{bmatrix}$ ett varv längs randen ∂Y med positiv orientering. (3p)

Lösning:

(a) En normal till ytan ges av $\mathbf{N}(x,y,z) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ -t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s + t^2 \\ s^2 + t \\ 1 + st \end{bmatrix}$. I punkten får vi $\mathbf{N}(\mathbf{r}(-1/2,1/2)) = \dfrac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, så vi kan välja $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som normal. Punkten $\mathbf{r}(-1/2,1/2) = (-3/8, -3/8, 1/4)$ ligger i tangentplanet, så planets ekvation blir $0 = 1(x+3/8) + 1(y+3/8) + 1(z-1/4) \Leftrightarrow x+y+z = -1/2$.

(b) Enhetsnormalen gånger area-elementet blir $\hat{\mathbf{N}}dS = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dsdt = \begin{bmatrix} -s + t^2 \\ s^2 + t \\ 1 + st \end{bmatrix} dsdt.$ Den är riktad uppåt på grund av att $1 + st > 0$. Flödet blir

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot \hat{N}dS &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{t} 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s^2 - t \\ s + \frac{1}{2}t^2 \\ -st \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -s + t^2 \\ s^2 + t \\ 1 + st \end{bmatrix} dsdt \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{t} (s^3 + 2st - t^3) dsdt = \int_{-1}^{1} (-\tfrac{1}{4} - t - \tfrac{3}{4}t^4) dt = -\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

(c) Stokes sats och $\nabla \times \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 + x \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}$ ger arbetet

$$\begin{aligned}\int_{\partial Y} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_Y (\nabla\times\mathbf{G})\cdot \hat{N}dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{t} (-s - \tfrac{1}{2}s^3 + 2st + t^2 + \tfrac{3}{2}s^2t^2 - t^3) dsdt \\ &= \int_{-1}^{1} (\tfrac{5}{8} - t + t^2 + t^3 - \tfrac{9}{8}t^4 + \tfrac{1}{2}t^5) dt = \tfrac{22}{15}.\end{aligned}$$

7. En kropp ockuperar området

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 \le z, y^2 \le z \le 2\}$$

och har densitet $\rho(x,y,z) = x + 2$. Beräkna kroppens massa. (3p)

Lösning: Lägsta punkten i K är $(0,0,0)$ så $0 \leq z \leq 2$. Snittet av K på höjd z har projektionen $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 | -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}, -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}\}$ på xy-planet. Fubini ger massan

$$M = \iiint_K \rho dV = \int_0^2 \iint_{D_z} (x+2) dxdy\, dz = \int_0^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} (x+2) dx\, dy\, dz$$
$$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} 4\sqrt{z} dy\, dz = \int_0^2 8z dz = 16.$$

8. (a) Antag att $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbara överallt. Härled formeln för derivatan av sammansättningen $f \circ \mathbf{g}$. (6p)

(b) Antag att $D \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (y,z) \in E, \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$, $E \in \mathbb{R}^2$ är kompakt och $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$, $P : D \to \mathbb{R}$ och att α, β, P är av klass C^1. Visa att

$$\iint_{\partial D} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz.$$

Detta är en del av beviset för Gauss sats, så du får inte använda Gauss sats eller någon av dess följdsatser i ditt bevis. (5p)

(c) Definiera vad som menas med att en mängd $D \in \mathbb{R}^2$ är *kvadrerbar*. (1p)

Lösning:

(a) Se "bevis av Sats 2.3.4 för ett godtyckligt antal variabler" på Canvas.

(b) Se beviset av sats 10.2.1 i boken men byt variabler.

(c) En mängd D är kvadrerbar om dess rand ∂D är en nollmängd, dvs att för varje $\epsilon > 0$ kan ∂D täckas med ett ändligt antal axelparallella rektanglar med total area mindre än ϵ.

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),\\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), & \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, & \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).
\end{aligned}
$$

Primitiva funktioner

$$
\begin{aligned}
\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C,\\
\int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C,\\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C,\\
\int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,\\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C, & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,\\
& & \int \sqrt{x^2+a} dx &= \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,\\
\int \frac{1}{(x^2+1)^n} &= I_n, & I_{n+1} &= \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.
\end{aligned}
$$

Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\\
\sin x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,\\
\arctan x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,\\
\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.
\end{aligned}
$$