MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2023-08-22 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2023 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna integralen (3p)

$$\iiint_D y dx dy dz.$$

(b) Beräkna integralen (3p)

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \exp(y^2) dy dx.$$

Lösning:

(a) Byte till sfäriska koordinater $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r\cos\theta$ ger $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ och området ges av olikheterna $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2$.

$$\begin{aligned}\iiint_D y dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi r \sin\theta \sin\phi r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr \\ &= \int_0^2 r^3 dr \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \int_0^\pi \sin\phi d\phi \\ &= \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 \Big[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\Big]_0^\pi \Big[-\cos\phi\Big]_0^\pi = 4\pi.\end{aligned}$$

(b) Vi kan inte hitta en enkel primitiv funktion till $\exp(y^2)$, så vi använder Fubini för att kasta om ordningen. Integrationsområdet kan skrivas om som
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \exp(y^2) dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x \exp(y^2) dx dy = \int_0^1 \exp(y^2) \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \exp(y^2) y dy \underset{u=y^2}{=} \frac{1}{4} \int_0^1 \exp(u) du = \frac{1}{4}\Big[\exp(u)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}(e - 1).\end{aligned}$$

2. Låt $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$.

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(x, y) = (1, 3)$ i riktningen mot punkten $(x, y) = (4, -1)$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 för $f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 3)$ och använd detta för att approximera $f(1.1, 3.2)$. (3p)

Lösning:

(a) $\nabla f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}} \begin{bmatrix} x \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,3) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$. Riktningen är $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Den normerade riktningsvektorn är $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Riktningsderivatan är därför $f'_{\hat{\mathbf{v}}}(1,3) = \nabla f(1,3) \cdot \hat{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{10}$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y)^{3/2}} \begin{bmatrix} y & -x/2 \\ -x/2 & -1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow H(1,3) = \dfrac{1}{32}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.
Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned} P(h,k) &= f(1,3) + \nabla f(1,3) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(1,3) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &= 2 + \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{4}k + \tfrac{1}{64}(12h^2 - 4hk - k^2). \end{aligned}$$

Approximationen blir $f(1.1, 3.2) \approx P(0.1, 0.2) = 2.1$.

3. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{aligned} u &= e^{x+y} - e^{x-y}, \\ v &= e^{x+y} + e^{x-y}. \end{aligned}$$

(a) Visa att det finns en omgivning av $(x,y) = (2,3)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ till PDE:n (3p)

$$(e^y - e^{-y})\frac{\partial f}{\partial x} - (e^y + e^{-y})\frac{\partial f}{\partial y} = -4e^x.$$

Lösning:

(a) Funtionaldeterminanten är $\begin{vmatrix} e^{x+y} - e^{x-y} & e^{x+y} + e^{x-y} \\ e^{x+y} + e^{x-y} & e^{x+y} - e^{x-y} \end{vmatrix} = -4e^{2x} \neq 0$. Inversa funktionssatsen ger därför att variabelbytet är inverterbart i en omgivning av den givna punkten.

(b) Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = e^x(e^y - e^{-y})\frac{\partial f}{\partial u} + e^x(e^y + e^{-y})\frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = e^x(e^y + e^{-y})\frac{\partial f}{\partial u} + e^x(e^y - e^{-y})\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$\begin{aligned} -4e^x &= (e^y - e^{-y})(e^x(e^y - e^{-y})\frac{\partial f}{\partial u} + e^x(e^y + e^{-y})\frac{\partial f}{\partial v}) \\ &\quad - (e^y + e^{-y})(e^x(e^y + e^{-y})\frac{\partial f}{\partial u} + e^x(e^y - e^{-y})\frac{\partial f}{\partial v}) \\ &= e^x((e^y - e^{-y})^2 - (e^y + e^{-y})^2)\frac{\partial f}{\partial u} = -4e^x\frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned}$$

Så PDE:n förenklas till $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 1$ som har allmän lösning $f(u,v) = u + h(v)$ där $h(v)$ är en godtycklig C^1 funktion. Byter vi tillbaka till (x,y) får vi:
Svar: $f(x,y) = e^{x+y} - e^{x-y} + h(e^{x-y} + e^{x+y})$.

4. Låt $f(x,y) = x^2 + 5y - 2xy - 2y^2 + \frac{1}{3}y^3$, $g(x,y) = 36 + \frac{1}{2}x^2 - 12y - xy + \frac{3}{2}y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

(c) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y)$ på nivåkurvan $g(x,y) = 1$. (3p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 5-2x-4y+y^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = y^2-6y+5 \\ x = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (y-5)(y-1) \\ x = y \end{cases}$. Så vi får de stationära punkterna $(1,1)$ och $(5,5)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4+2y \end{bmatrix}$. I punkten $(1,1)$ får vi $\det(H(1,1)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(1,1) = \frac{7}{3}$ är en sadelpunkt. I punkten $(5,5)$ får vi $\det(H(5,5)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0$ och första komponenten (2) av $H(5,5)$ är positiv gör att Hessianen är positivt definit och $f(5,5) = -\frac{25}{3}$ är en lokal minpunkt.

(c) Lagranges metod ger att max och min endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g = 1$. De är parallella om $0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x-2y & 5-2x-4y+y^2 \\ x-y & -12-x+3y \end{vmatrix} = (x-y)\begin{vmatrix} 2 & 5-2x-4y+y^2 \\ 1 & -12-x+3y \end{vmatrix} = -(x-y)(y^2-10y+29)$, men $y^2-10y+29 = (y-5)^2+4 > 0$, så $x = y$ är enda möjligheten. $1 = g(x,y) = g(y,y) = 36-12y+y^2 \Leftrightarrow 0 = (y-6)^2-1 = (x-7)(x-5)$. Vi har därför minsta och största värde $f(5,5) = -\frac{25}{3}$, $f(7,7) = \frac{7}{3}$.

5. Låt γ vara kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 2t^3/3 \\ t^2 \\ t \end{bmatrix}$ för $0 \leq t \leq 1$.

(a) Beräkna längden av γ. (2p)

(b) Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ längs γ där $\Phi = \arctan(3x-y^2) + \ln(1+y-z)$. (2p)

Lösning:

(a) Parametriseringen ger $\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}$. Kurvlängden ges av

$$\int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{(2t^2)^2+(2t)^2+1}\,dt = \int_0^1 \sqrt{4t^4+4t^2+1}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(2t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 (2t^2+1)dt = \left[\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

(b) Fältet är konservativt, så

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)) = \arctan(1) + \ln(1) - \arctan(0) - \ln(1) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Låt $Y = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$ och låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z-3 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med Gauss sats. (4p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y med direkt parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) Ytan är en del av en kon. Lägg till en bottenyta $Y_b = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 \leq 1, z=1\}$ och en toppyta $Y_t = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 \leq 2^2, z=2\}$. Tillsammans begänsar de en kropp $K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2\}$ med $\partial K = Y \cup Y_b \cup Y_t$. Byter vi till translaterade cylinderkoordinater $x = 1+\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ får vi $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ och K ges av olikheterna $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq z$, $1 \leq z \leq 2$. Gauss sats och $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ ger

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z 3\rho d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_1^2 \left[\frac{3\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^z dz$$
$$= 3\pi \int_1^2 z^2 dz = \pi\left[z^3\right]_1^2 = 7\pi.$$

Ytan Y_t har utåtriktad normal $\hat{N} = \hat{z}$ och ytan Y_b har utåtriktad normal $\hat{N} = -\hat{z}$. Normalen till Y skulle däremot vara riktad uppåt, vilket ger normal in mot K. Vi får därför

$$7\pi = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = -\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{Y_b} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{Y_t} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS$$
$$= -\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS - \iint_{Y_b} (1-3) dS + \iint_{Y_t} (2-3) dS.$$

Botten och toppen är cirkelskivor, så flödet upp genom Y blir

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = 2\mu(Y_b) - \mu(Y_t) - 7\pi = 2\pi \cdot 1^2 - \pi \cdot 2^2 - 7\pi = -9\pi.$$

(b) Ytan kan parametriseras med $\mathbf{r}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} 1+z\cos\varphi \\ z\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}$ då $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $1 \leq z \leq 2$.

$$\hat{N} dS = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \pm \begin{bmatrix} -z\sin\varphi \\ z\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{bmatrix}.$$

Då vi skulle mäta flödet upp genom ytan väljer vi tecknet så z komponenten blir positiv. Flödet blir

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -z\cos\varphi \\ -z\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} d\varphi dz$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -3z d\varphi dz = -6\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^2 = -9\pi.$$

7. Låt $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\sin(2t-x)dt$.

Bestäm en rationell funktion $q(x)$, så att $f''(x) + f(x) = q(x)\sin(x)$. (4p)

Lösning: Integranden $g(x,t) = \ln(1+t^2)\sin(2t-x)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$g(x,x) = \ln(1+x^2)\sin(x), \qquad g'_x(x,t) = -\cos(2t-x)\ln(1+t^2),$$
$$f'(x) = \int_0^x g'_x(x,t)dt + g(x,x) = \int_0^x -\cos(2t-x)\ln(1+t^2)dt + \ln(1+x^2)\sin(x).$$

Om vi låter $h(x,t) = -\cos(2t-x)\ln(1+t^2)$, får vi på samma sätt

$$
\begin{aligned}
h(x,x) =& -\ln(1+x^2)\cos(x), \qquad h'_x(x,t) = -\ln(1+t^2)\sin(2t-x),\\
f''(x) =& \int_0^x h'_x(x,t)dt + h(x,x) + \frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)\sin(x))\\
=& -\int_0^x \ln(1+t^2)\sin(2t-x)dt - \ln(1+x^2)\cos(x) + \frac{2x}{1+x^2}\sin(x) + \ln(1+x^2)\cos(x)\\
=& -f(x) + \frac{2x}{1+x^2}\sin(x).
\end{aligned}
$$

Svar: $q(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^2 i en omgivning av en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Bevisa att $f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a})$. (5p)

(b) Antag att $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ är en axelparallell rektangel och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig. Visa att f är integrerbar över Δ. (5p)

(c) Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen mängd. Definiera vad som menas med att Ω är *enkelt sammanhängande*. (1p)

(d) Definiera begreppet *nollmängd*. (1p)

Lösning:

(a) Se beviset av Clairauts sats på kurshemsidan eller sida 87 i boken.

(b) Se sidan 237 i boken.

(c) Ω är enkelt sammanhängande om den är bågvis sammanhängande och om varje sluten kurva i Ω kan kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna Ω.

(d) En mängd N kallas *nollmängd* om man för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar med total area $\leq \epsilon$.

Lycka till!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$