MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2023-06-07 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Tentamen 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2023 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{annars} \end{cases},$$
$$g(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$F(x,y,z) = 2\sqrt{x} - z + \ln(x+y-z)$$

(a) Avgör ifall funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för $g(x,y)$ i punkten $(x,y) = (1,1)$ och använd detta för att approximera $g(2-\pi/4, \pi/4)$. (3p)

(c) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = 1$ definierar en implicit funktion $z = h(x,y)$ i en omgivning av $(1,1,1)$ och bestäm h'_x och h'_y i punkten. (2p)

2. Använd variabelbytet $u = e^{-x}\cos y$, $v = e^{-x}\sin y$ för att bestämma lösningen $f(x,y)$ till PDE:n

$$\cos y\frac{\partial f}{\partial x} + \sin y\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-2x}\sin y$$

som uppfyller $f(t,\pi/2) = e^{-2t}$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (5p)

3. (a) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}}dydx.$$

Glöm inte att motivera dina beräkningar! (4p)

(b) Beräkna integralen

$$\iiint_D z^2 dxdydz,$$

där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. (3p)

4. Låt $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 4xy + x^2y + 2y^2 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

5. Låt γ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z=3$ och $x^2+y^2-z=1$, orienterad moturs sett ovanifrån och låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} xe^{z^2}+y \\ x^2+yz \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med Stokes sats. (4p)

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med direkt parametrisering av kurvan. (3p)

6. Låt $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\sin(t-x)dt$. Visa att $f(x)$ löser differentialekvationen (4p)

$$f(x) + f''(x) = -\arctan(x).$$

7. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ e^z \end{bmatrix}$ upp genom ytan $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$. (4p)

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en godtycklig C^1 funktion. Visa att f är differentierbar. (6p)

(b) Bevisa att kurvintegralen av ett konservativt fält i $\mathbb{R}^n$ är en potentialdifferens. (3p)

(c) Definiera vad som menas med att $\Phi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ är en **trappfunktion**. (2p)

(d) Låt γ vara en sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Definiera vad som menas att γ är **negativt orienterad**. (1p)

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2023 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{cases} 0 & \text{då } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{annars} \end{cases}, \\ g(x,y) &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \\ F(x,y,z) &= 2\sqrt{x} - z + \ln(x+y-z) \end{aligned}$$

(a) Avgör ifall funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för $g(x,y)$ i punkten $(x,y)=(1,1)$ och använd detta för att approximera $g(2-\pi/4, \pi/4)$. (3p)

(c) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z)=1$ definierar en implicit funktion $z=h(x,y)$ i en omgivning av $(1,1,1)$ och bestäm h'_x och h'_y i punkten. (2p)

Lösning:

(a) $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$, så funktionen är inte kontinuerlig.

(b) Gradienten och Hessianen är $\nabla g = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$, $H(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{bmatrix} -2xy & x^2-y^2 \\ x^2-y^2 & 2xy \end{bmatrix}$.
Vi får

$$\begin{aligned} P(h,k) &= g(1,1) + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \cdot \nabla g(1,1) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(1,1) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &= \pi/4 + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{4}h^2 - \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{4}\pi, \\ g(2-\pi/4, \pi/4) &\approx P(1-\pi/4, \pi/4 - 1) = 1. \end{aligned}$$

(c) Gradienten är $\nabla F(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^{-1/2} + \frac{1}{x+y-z} \\ \frac{1}{x+y-z} \\ -1 - \frac{1}{x+y-z} \end{bmatrix}$, $\nabla F(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. På grund av att $F'_z(1,1,1) = -2 \neq 0$ så ger implicita funktionssatsen en funktion $z=h(x,y)$ med $h'_x(1,1) = \dfrac{-F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = 1$ och $h'_y(1,1) = \dfrac{-F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \dfrac{1}{2}$.

2. Använd variabelbytet $u = e^{-x}\cos y$, $v = e^{-x}\sin y$ för att bestämma lösningen $f(x,y)$ till PDE:n

$$\cos y \frac{\partial f}{\partial x} + \sin y \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-2x}\sin y$$

som uppfyller $f(t, \pi/2) = e^{-2t}$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (5p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = -e^{-x}\cos y\frac{\partial}{\partial u} - e^{-x}\sin y\frac{\partial}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = -e^{-x}\sin y\frac{\partial}{\partial u} + e^{-x}\cos y\frac{\partial}{\partial v}.$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$e^{-2x}\sin y = -e^{-x}(\cos^2 y + \sin^2 y)\frac{\partial f}{\partial u} = -e^{-x}\frac{\partial f}{\partial u} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = -e^{-x}\sin y = -v.$$

Integrerar vi med avseende på u får vi $f(u, v) = -uv + g(v)$ för någon funktion $g \in C^1$. $x = t$, $y = \pi/2$ motsvarar $u = 0$, $v = e^{-t}$, så villkoret ger $v^2 = f(0, v) = g(v)$. Alltså $f(u, v) = -uv + v^2$. Byter vi tillbaka till (x, y) koordinater får vi:
Svar: $f(x, y) = -e^{-2x}\cos y \sin y + e^{-2x}\sin^2 y$.

3. (a) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}dydx.$$

Glöm inte att motivera dina beräkningar! (4p)

(b) Beräkna integralen

$$\iiint_D z^2 dxdydz,$$

där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. (3p)

Lösning:

(a) Integralen är generaliserad i $x = \infty$ och i punkten $x = y = 1$. I det inre av området gäller $0 < x < 1 < y \Rightarrow x^2 - y^2 > 0$, så integranden är positiv där, så vi kan räkna som vanligt. För att enklare hitta en primitiv funktion använder vi Fubini för att kasta om integrationsordningen.

$$\int_1^\infty \int_0^1 \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}dydx = \int_0^1 \int_1^\infty \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{(x^2 - y^2)^{1/2}}\right]_{x=1}^\infty dy = \int_0^1 (1 - y^2)^{-1/2}dy = [\arcsin(y)]_{y=0}^1 = \frac{\pi}{2}$$

(b) Byter vi till sfäriska koordinater (r, θ, ϕ) får vi området $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och volymelementet blir $dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$, så

$$\iiint_D z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\cos^2\theta r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^2 \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta \underset{u=\cos\theta}{=} -\frac{64\pi}{5}\int_1^0 u^2 du = \frac{64\pi}{15}.$$

4. Låt $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - 4xy + x^2y + 2y^2 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna uppfyller $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - 4y + 2xy - y^2 \\ -4x + x^2 + 4y - 2xy + y^2 \end{bmatrix}$. Summan av ekvationerna ger $0 = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$. Detta ger $x = 0$ eller $x = -4$ som insatt i första ekvationen ger $0 = -y^2 - 4y$ respektive $0 = 4 - y^2$. Vi får alltså punkterna $p_1 = (0,-4)$, $p_2 = (0,0)$, $p_3 = (2,-2)$, $p_4 = (2,2)$

(b) Hessianen är $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+2y & -4+2x-2y \\ -4+2x-2y & 4-2x+2y \end{bmatrix}$. $\det H(x,y) = -16 + 24x - 8x^2 - 8y + 8xy$. I de olika punkterna får vi $\det H(p_1) = 16$, $\det H(p_2) = -16$, $\det H(p_3) = -16$, $\det H(p_4) = 16$, så p_2 och p_3 är indefinita. Första elementet i Hessianen är -8 respektive 8 för p_1 respektive p_4, så p_1 är negativt definit och p_4 är positivt definit.

5. Låt γ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z = 3$ och $x^2 + y^2 - z = 1$, orienterad moturs sett ovanifrån och låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} xe^{z^2} + y \\ x^2 + yz \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med Stokes sats. (4p)

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med direkt parametrisering av kurvan. (3p)

Lösning:

(a) $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y \\ 2xze^{z^2} \\ 2x-1 \end{bmatrix}$ Skärningen mellan ytorna ges av $z = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. Vi kan vända Stokes sats på en del av någon av de givna ytorna, men det är enklare att använda cirkelskivan $S = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ med uppåtriktad normal, så $\widehat{N} dS = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dxdy$. Stokes sats ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Pi(S)} \nabla \times \mathbf{F}(x,y,1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \iint_{\Pi(S)} (2x-1) dxdy$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2r\cos\theta - 1) r d\theta dr = \int_0^{\sqrt{2}} \Big[2r^2 \sin\theta - \theta r \Big]_0^{2\pi} dr$$
$$= -2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r dr = -2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = -2\pi.$$

(b) γ kan parametriseras med $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sqrt{2}e\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ 2\cos^2\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2}\cos^3\theta + (2-e)\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta + (2-e)\cos\theta\sin\theta - 1 + \cos(2\theta)) d\theta$$
$$\underset{u=\sin\theta}{=} \int_0^0 (2\sqrt{2}(1-u^2) + (2-e)u) du + \left[-\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

6. Låt $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\sin(t-x)dt$. Visa att $f(x)$ löser differentialekvationen (4p)

$$f(x) + f''(x) = -\arctan(x).$$

Lösning: Integranden $g(x,t) = \arctan(t)\sin(t-x)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$\begin{aligned} g(x,x) &= 0, \qquad g'_x(x,t) = -\arctan(t)\cos(t-x), \\ f'(x) &= \int_0^x g'_x(x,t)dt + g(x,x)\frac{d}{dx}(x) = -\int_0^x \arctan(t)\cos(t-x)dt. \end{aligned}$$

Om vi låter $h(x,t) = -\arctan(t)\cos(t-x)$, får vi på samma sätt

$$\begin{aligned} h(x,x) &= -\arctan(x), \qquad h'_x(x,t) = -\arctan(t)\sin(t-x), \\ f''(x) &= \int_0^x h'_x(x,t)dt + h(x,x)\frac{d}{dx}(x) = -\int_0^x \arctan(t)\sin(t-x)dt - \arctan(x) \\ &= -f(x) - \arctan(x). \end{aligned}$$

7. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ e^z \end{bmatrix}$ upp genom ytan $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$. (4p)

Lösning: Ytan $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ är inte sluten, så vi lägger till bottenskivan $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Låt normalen till Y vara $\widehat{N}$ som pekar uppåt och normalen till D vara $\widehat{N}_1$ som pekar nedåt. Tillsammans begränsar Y och D ett område $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Gauss sats och byte till sfäriska koordinater ger

$$\begin{aligned} &\iint_Y \mathbf{F}\cdot\widehat{N}dS + \iint_D \mathbf{F}\cdot\widehat{N}_1 dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}dV \\ &= \iiint_K (x^2+y^2+e^z)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2\sin^2\theta + e^{r\cos\theta})r^2\sin\theta\, dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi\int_0^1\int_0^{\pi/2} (r^2(1-\cos^2\theta) + e^{r\cos\theta})r^2\sin\theta\, d\theta dr \\ &\underset{u=\cos\theta}{=} -2\pi\int_0^1\int_1^0 (r^2(1-u^2)+e^{ru})r^2 du dr = 2\pi\int_0^1 \left[r^4u - r^4u^3/3 + re^{ru}\right]_{u=0}^1 dr \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{2}{3}r^4 + re^r - r\right)dr = 2\pi\left[\frac{2}{15}r^5 - \frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^1 + 2\pi\int_0^1 re^r dr \\ &\underset{P.I.}{=} \frac{11\pi}{15} + 2\pi\left[re^r\right]_{r=0}^1 - 2\pi\int_0^1 e^r dr = \frac{11\pi}{15} + 2\pi e - 2\pi(e-1) = \frac{19\pi}{15}. \end{aligned}$$

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en godtycklig C^1 funktion. Visa att f är differentierbar. (6p)

(b) Bevisa att kurvintegralen av ett konservativt fält i $\mathbb{R}^n$ är en potentialdifferens. (3p)

(c) Definiera vad som menas med att $\Phi : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ är en **trappfunktion**. (2p)

(d) Låt γ vara en sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Definiera vad som menas att γ är **negativt orienterad**. (1p)

Lösning:

(a) Se sats 2.2.3 i boken.

(b) Se sats 9.4.2 i boken.

(c) Se avsnitt 6.1 i boken.

(d) γ är negativt orienterad om insidan av γ ligger till höger om färdriktningen. Om kurvan är enkel innebär detta medurs orientering.

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$