MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2023 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $F(x,y,z) = x^2y + z^{1/2} + \ln(xyz)$ och

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-y} & \text{då } x \neq y \\ 2 & \text{då } x = y \end{cases}.$$

(a) Visa att den partiella derivatan $g'_x(1,1)$ existerar, och beräkna dess värde. (1p)

(b) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = 2$ definierar en implicit funktion $y = h(x,z)$ i en omgivning av $(1,1,1)$ och bestäm h'_x och h'_z i punkten. (2p)

2. Använd variabelbytet $u = xy$, $v = y$ för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (5p)

$$y = y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}$$

3. Låt $R > 0$ vara godtyckligt och låt

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq R, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(a) Använd variabelbytet $x = r\cos^4\theta$, $y = r\sin^4\theta$ för att beräkna arean av området D_R. (3p)

(b) Använd resultatet från (a) uppgiften för att beräkna för $D = D_R$ med $R = 1$ (2p)

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-3}\,dxdy.$$

4. Låt $f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - y + xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ och $g(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna till $f(x,y)$ med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Bestäm största och minsta värde för $f(x,y)$ på området som ges av $g(x,y) \leq 3/4$. (4p)

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z + x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ upp genom ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - (x^2 + y^2)^2\},$$

med följande metoder:

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Parametrisering av ytan. (3p)

6. Bestäm masscentrum för en homogen kropp som ockuperar området (4p)

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\}$$

7. Den parametriserade kurvan

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 - t - t^3 \\ t^2 - t^3 \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

går i en båge från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ övre halvplanet. Använd Greens sats för att beräkna arean av området mellan denna kurva och x-axeln. (4p)

8. (a) Bevisa Taylors formel av ordning 2 för en skalärvärd funktion av två variabler av klass C^3 utgående från motsvarande envariabel-resultat.
Uttryck resttermen med derivator, ej $\mathcal{O}$-notation. (5p)

(b) Antag att $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ är en axelparallell rektangel och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig. Visa att f är integrerbar över Δ. (5p)

(c) Låt $D \in \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$ ett konservativt C^1 vektorfält. Visa att $\mathbf{F}$ är virvelfritt. Om du använder någon ∇-räkneregel behöver du visa den. (3p)

(d) Om $\mathbf{r}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ beskriver läget för en partikel vid tiden t och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett kraftfält som verkar på partikeln. Skriv upp en integral över t som beskriver arbetet som kraften $\mathbf{F}$ utför på partikeln under tidsintervallet $[a, b]$. (1p)

VÄND!

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2023 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $F(x,y,z) = x^2y + z^{1/2} + \ln(xyz)$ och

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-y} & \text{då } x \neq y \\ 2 & \text{då } x = y \end{cases}.$$

(a) Visa att den partiella derivatan $g'_x(1,1)$ existerar, och beräkna dess värde. (1p)

(b) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = 2$ definierar en implicit funktion $y = h(x,z)$ i en omgivning av $(1,1,1)$ och bestäm h'_x och h'_z i punkten. (2p)

Lösning:

(a) Följande gränsvärde existerar och är lika med den partiella derivatan

$$g'_x(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h,1) - g(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2-1}{h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1 - 2h}{h^2}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

(b) $\nabla F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} + 2xy \\ x^2 + \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{2}z^{-1/2} \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla F(1,1,1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$. Då $F'_y \neq 0$ ger implicita funktionssatsen ger att det existerar en omgivning U av $(1,1,1)$ och en funktion h så att $y = h(x,z)$ löser $F(x,y,z) = 2$ på U. Satsen ger dessutom att $h'_x(1,1,1) = \frac{-F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)} = -3/2$ och $h'_z(1,1,1) = \frac{-F'_z(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)} = -3/4$.

2. Använd variabelbytet $u = xy$, $v = y$ för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (5p)

$$y = y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}$$

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = y\frac{\partial}{\partial u}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial}{\partial u}) = y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} = y^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}) = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} + xy\frac{\partial^2}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}.
\end{aligned}$$

Sätter vi in det i PDE:n får vi

$$y = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{v}.$$

Integrerar vi med avseende på u får vi $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u}{v} + k(v)$ för någon funktion $k \in C^1$. Integrerar vi en gång till får vi $f(u,v) = u\ln(v) + g(v) + h(u)$ där $g'(v) = k(v)$. För att $f \in C^2$ behöver vi $g, h \in C^2$. Byter vi tillbaka till (x,y) koordinater får vi:
Svar: $f(x,y) = xy\ln(y) + g(xy) + h(y)$, där g och h är C^2 funktioner.

3. Låt $R > 0$ vara godtyckligt och låt

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq R, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(a) Använd variabelbytet $x = r\cos^4\theta$, $y = r\sin^4\theta$ för att beräkna arean av området D_R. (3p)

(b) Använd resultatet från (a) uppgiften för att beräkna för $D = D_R$ med $R = 1$ (2p)

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-3} dxdy.$$

Lösning:

(a) Med $x = r\cos^4\theta$, $y = r\sin^4\theta$ får vi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}\cos^2\theta + \sqrt{r}\sin^2\theta = \sqrt{r}$. I de här koordinaterna ges området av $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq R^2$. Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos^4\theta & -4r\cos^3\theta\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4r\sin^3\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 4r\sin^3\theta\cos^3\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4r\sin^3\theta\cos^3\theta.$$

Den sökta arean blir

$$\begin{aligned}\mu(D_R) &= \int_0^{R^2}\int_0^{\pi/2} 4r\sin^3\theta\cos^3\theta d\theta dr = \Big[2r^2\Big]_0^{R^2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta \\ &= \left\{\begin{array}{c} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta d\theta \end{array}\right\} = 2R^4\int_0^1 u^3(1-u^2)du = 2R^4\Big[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{R^4}{6}.\end{aligned}$$

(b) Metoden med nivåytor ger med $h(u) = u^{-3}$, $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ och $A(u) = \mu(\{(x,y) \in D : g(x,y) \leq u\}) = \mu(D_u) = \frac{u^4}{6}$

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-3} dxdy = \int_0^1 h(u)A'(u)du = \int_0^1 u^{-3}\frac{4u^3}{6}du = \frac{2}{3}\int_0^1 du = \frac{2}{3}.$$

4. Låt $f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - y + xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ och $g(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna till $f(x,y)$ med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (2p)

(c) Bestäm största och minsta värde för $f(x,y)$ på området som ges av $g(x,y) \leq 3/4$. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna ges av villkoren

$$\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y - x \\ y^2 + x - y - 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ 0 = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{cases}$$

Så de stationära punkterna är $(-1,-1)$ och $(1,1)$.

(b) Hessianen blir

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2y-1 \end{bmatrix}$$

$H(-1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ är negativt definit ty $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 > 0$ och $f''_{xx}(-1,-1) = -1 < 0$, så $(-1,-1)$ är en lokal maxpunkt.
$H(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är indefinit ty $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$, så $(1,1)$ är en sadelpunkt.

(c) $g(x,y) = 2$ för de stationära punkterna från (a) uppgiften så max och min måste ligga på kurvan $g(x,y) = 3/4$, dvs cirkeln med radie $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Extrempunkterna kan hittas med parametrisering, men vi prövar Lagranges metod som ger att för en extrempunkt måste ∇f och ∇g vara parallella vilket är ekvivalent med

$$0 = \begin{vmatrix} f'_x & g'_x \\ f'_y & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & 2x \\ y^2+x-y-1 & 2y \end{vmatrix} = 2(y^2 - xy^2 + x - x^2) = 2(1-x)(x+y^2)$$

På cirkeln reducerar detta till

$$0 = 2(1-x)(x+y^2) = 2(1-x)(\tfrac{3}{4} + x - x^2) = 2(x-1)(x-\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{1}{2}).$$

Rötterna $x = 3/2$ och $x = 1$ ger $g(x,y) \geq 9/4$ respektive $g(x,y) \geq 1$, så de ger inte punkter på cirkeln. Alltså är $x = -1/2$ enda möjligheten. Detta ger $y^2 = 3/4 - 1/4 = 1/2$. Vi får därför två punkter $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Största respektive minsta värde blir $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z + x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ upp genom ytan

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - (x^2+y^2)^2\},$$

med följande metoder:

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) Ytan Y är inte sluten, men lägger vi till ytan $Y_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, z = 0\}$ med normal $\hat{N} = -\hat{z}$ får vi $Y \cup Y_2 = \partial K$ där $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - (x^2+y^2)^2\}$. Divergensen blir $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 6$. Gauss sats ger nu

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

På Y_2 blir $\mathbf{F} \cdot \hat{N} = -4z - x^2 - y^2 = -x^2 - y^2$ så med polära koordinater får vi

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2 \, r dr d\theta = -2\pi \Big[\frac{r^4}{4}\Big] = \frac{-\pi}{2}.$$

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\pi(K)} \int_0^{1-(x^2+y^2)^2} 6 dz dx dy = 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^4) r dr d\theta$$

$$= 12\pi \Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\Big] = 4\pi.$$

Svar: $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = 4\pi + \pi/2 = 9\pi/2$.

(b) Vi kan tolka Y som en funktionsyta $z = f(x,y) = 1-(x^2+y^2)^2$ och använda x och y som parametrar.

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{N}dS = (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y})dxdy = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} 4x(x^2+y^2) \\ 4y(x^2+y^2) \\ 1 \end{bmatrix} dxdy$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = (4+x^2+y^2)dxdy$$

Med polära koordinater får vi

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N}dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4+r^2)rdrd\theta = 2\pi\Big[2r^2 + \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{9\pi}{2}.$$

6. Bestäm masscentrum för en homogen kropp som ockuperar området (4p)

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+4z^2 \leq 4\}$$

Lösning: Låt ρ vara densiteten. Att kroppen är homogen betyder att ρ är konstant. Koordinatbytet

$$\begin{cases} x = 2r\sin\theta\cos\phi \\ y = 2r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} = 4r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

på grund av att det är en omskalning av sfäriska koordinater. I dessa koordinater ges området av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Massan ges av

$$M = \iiint_K \rho dxdydz = \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$$
$$= 4\rho\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2}\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{4\pi\rho}{3}.$$

Masscentrum ligger i (m_x, m_y, m_z) där

$$m_x = \frac{1}{M}\iiint_K x\rho dxdydz, \quad m_y = \frac{1}{M}\iiint_K y\rho dxdydz, \quad m_z = \frac{1}{M}\iiint_K z\rho dxdydz.$$

Området är symmetriskt under speglingen $y \to -y$, så $m_y = 0$. Med ovanstående koordinatbyte får vi

$$m_x = \frac{3}{4\pi\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2r\sin\theta\cos\phi\ \rho\ 4r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$= \frac{6}{\pi}\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1\Big[\sin\phi\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1-\cos(2\theta))d\theta$$
$$= \frac{3}{2\pi}\Big[\theta - \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{4}.$$
$$m_z = \frac{3}{4\pi\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\theta\ \rho\ 4r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$= \frac{3}{\pi}\pi\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta \underset{u=\sin\theta}{=} \frac{3}{4}\int_0^1 u\ du = \frac{3}{4}\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Svar: Masscentrum ligger i punkten $(3/4, 0, 3/8)$.

7. Den parametriserade kurvan

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1-t-t^3 \\ t^2-t^3 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1$$

går i en båge från $(1,0)$ till $(-1,0)$ övre halvplanet. Använd Greens sats för att beräkna arean av området mellan denna kurva och x-axeln. (4p)

Lösning: Låt γ_1 beteckna kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1-t-t^3 \\ t^2-t^3 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1$$

och låt γ_2 vara linjestycket från $(-1,0)$ till $(1,0)$ med $t = x$ som parametrer. Vi vill beräkna arean av området D som har rand $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix}$. Då är arean av D

$$\mu(D) = \iint_D 1dxdy = \iint_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ på grund av att $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ där. Arean kan därför beräknas till

$$\begin{aligned}\mu(D) &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} -t^2+t^3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-3t^2 \\ 2t-3t^2 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^2 - t^3 + 3t^4 - 3t^5 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{11}{60}.\end{aligned}$$

8. (a) Bevisa Taylors formel av ordning 2 för en skalärvärd funktion av två variabler av klass C^3 utgående från motsvarande envariabel-resultat.
Uttryck resttermen med derivator, ej $\mathcal{O}$-notation. (5p)

(b) Antag att $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ är en axelparallell rektangel och att $f : \Delta \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig. Visa att f är integrerbar över Δ. (5p)

(c) Låt $D \in \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$ ett konservativt C^1 vektorfält. Visa att $\mathbf{F}$ är virvelfritt. Om du använder någon ∇-räkneregel behöver du visa den. (3p)

(d) Om $\mathbf{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ beskriver läget för en partikel vid tiden t och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett kraftfält som verkar på partikeln. Skriv upp en integral över t som beskriver arbetet som kraften $\mathbf{F}$ utför på partikeln under tidsintervallet $[a,b]$. (1p)

Lösning:

(a) Vi vill Taylor-utveckla $f(x,y) \in C^3$ kring (a,b). Fixera (h,k) och låt $F(t) = f(a + th, b+tk) \in C^3$. Taylorutveckling av F kring $t = 0$ ger

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + F''(\xi)\frac{t^3}{3!},$$

för något ξ mellan 0 och t. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{d}{dt}(f(a+th, b+tk)) = f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k \\ &= ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f)(a+th, b+tk)\end{aligned}$$

F' och $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f$ har samma relation som F och f, så vi kan upprepa och få

$$F^{(i)}(t) = ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^i f)(a+th, b+tk)$$

Sätter vi $t = 1$ i Taylorutvecklingen får vi

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\xi) \\
&= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f)(a,b) \\
&\quad + ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f)(a+\xi h, b+\xi k) \\
&= f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f''_x x(a,b) + 2hkf''_x y(a,b) + k^2 f''_y y(a,b)) \\
&\quad + ((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f)(a+\xi h, b+\xi k),
\end{aligned}$$

för något $0 \leq \xi \leq 1$.

(b) Se sidan 235 i boken.

(c) Antagandet betyder att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon C^2 funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

enligt Clairouts sats.

(d) $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$