MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2022-08-23 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Tentamen 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2022 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = \log(x^2 + y)$.

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ i riktningen $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,0)$ och använd detta för att approximera $f(0.9, 0.2)$. (3p)

2. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{\sqrt{y}} \\ v = x^2 + y \end{cases}$$

(a) Visa att det finns en omgivning av $(x,y) = (2,1)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$x f'_x + 2y f'_y = \frac{x^2}{y}$$

3. (a) Låt $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Beräkna (3p)

$$\iiint_T \sin\bigl(\pi(x+y+z)^3\bigr) dxdydz.$$

(b) Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2} dxdy.$$

4. Låt $f(x,y) = -3x + \frac{1}{3}x^3 + 2xy + y^2$, $g(x,y) = 2(x-4)^2 + (x+y)^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

(c) Motivera varför $f(x,y)$ måste anta största och minsta värde på nivåkurvan $g(x,y) = 2$ och bestäm dessa. (4p)

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$, med följande metoder:

(a) Lämplig parametrisering av ytan. (3p)

(b) Gauss sats. (3p)

(Volym- och area-formler från gymnasiet får användas utan bevis.)

6. För $x > 0$, låt $f(x) = \int_0^x e^t \ln(1 + x - t)dt$. Visa att $f(x)$ uppfyller differentialekvationen $f'(x) - f(x) = \ln(1 + x)$ för $x > 0$. (3p)

7. Låt D vara området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y = x^3$ och $x = y^2$ och låt ∂D vara den positivt orienterade randen. Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ längs ∂D med hjälp av:

(a) Direkt parametrisering av randen. (3p)

(b) Greens sats. (2p)

8. (a) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen, bågvist sammanhängande mängd (domän). Antag att $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ är C^0 och sådant att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen. Visa att $\mathbf{F}$ är ett konservativt fält. (5p)

(b) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^2 i en omgivning av en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
Bevisa att $f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a})$. (5p)

(c) Definiera begreppet *kvadrerbar mängd* i $\mathbb{R}^2$. (2p)

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER Chalmers tekniska högskola Examinator: Thomas Bäckdahl Lösningsförslag

Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel Datum: 2022-08-23 kl. 08.30–12.30 Telefonvakt: Thomas Bäckdahl 031-772 5396

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2022 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$. [1]

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ i riktningen $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,0)$ och använd detta för att approximera $f(0.9, 0.2)$. (3p)

Lösning:

(a) Gradienten är $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y}\begin{bmatrix}2x\\1\end{bmatrix}$. Den normaliserade riktningsvektorn är $\mathbf{v} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$. Riktningsderivatan blir $f'_{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\nabla f(1,1) = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 1$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y)^2}\begin{bmatrix}-2(x^2-y) & -2x\\ -2x & -1\end{bmatrix}$.
Taylorpolynomet och approximationen blir

$$\begin{aligned}
P(h,k) &= f(1,0) + \begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\cdot\nabla f(1,0) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix} H(1,0)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\\
&= 2h - h^2 + k - 2hk - \tfrac{1}{2}k^2\\
f(0.9,0.2) &\approx P(-0.1, 0.2) = 0.01.
\end{aligned}$$

2. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{\sqrt{y}}\\ v = x^2 + y\end{cases}$$

(a) Visa att det finns en omgivning av $(x,y) = (2,1)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$xf'_x + 2yf'_y = \frac{x^2}{y}$$

Lösning:

[1] I orginaltexten stod det log istället för ln som det var tänkt. Tolkning som 10-logaritm bedöms också som korrekt. Det ger bara en omskalning.

(a) Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y^{-1/2} & -\frac{1}{2}xy^{-3/2} \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = \frac{x^2+y}{y^{3/2}}$$

I punken är den nollskilld. Inversa funktionssatsen ger att variabelbytet är inverterbart i en omgivning av punkten.

(b) Antag att $x > 0$, $y > 0$. Då blir även $u > 0$ och $v > 0$. Kedjeregeln ger

$$f'_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = y^{-1/2}f'_u + 2xf'_v$$
$$f'_y = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{2}xy^{-3/2}f'_u + f'_v$$

så PDE:n uttryckt i (u,v) blir

$$x(y^{-1/2}f'_u + 2xf'_v) + 2y(-\frac{1}{2}xy^{-3/2}f'_u + f'_v) = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow 2(x^2+y)f'_v = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow f'_v = \frac{u^2}{2v}.$$

Den allmänna lösningen blir $f(u,v) = \frac{1}{2}u^2\ln(v) + h(u)$, där $h \in C^1(\mathbb{R})$ är godtycklig.

Svar: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2y}\ln(x^2+y) + h\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)$ där $h \in C^1(\mathbb{R})$ är en godtycklig funktion.

3. (a) Låt $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Beräkna (3p)

$$\iiint_T \sin\big(\pi(x+y+z)^3\big)dxdydz.$$

(b) Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dxdy.$$

Lösning:

(a) Vi integrerar med hjälp av nivåytor. Låt $g(x,y,z) = x+y+z$, $h(u) = \sin(\pi u^3)$ och $T_u = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq u\}$. Volymen av tetraedern T_u är $V(u) = \frac{1}{2}u^2u\frac{1}{3} = \frac{1}{6}u^3 \Rightarrow V'(u) = \frac{1}{2}u^2$. Integralen blir

$$\iiint_T \sin\big(\pi(x+y+z)^3\big)dxdydz = \int_0^1 h(u)V'(u)du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi u^3)u^2du$$
$$= \left\{\begin{array}{c} t = \pi u^3 \\ dt = 3\pi u^2 du \\ u = 0 \leftrightarrow t = 0 \\ u = 1 \leftrightarrow t = \pi \end{array}\right\} = \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \sin(t)dt = \frac{1}{6\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = \frac{1}{3\pi}.$$

(b) Byte till polära koordinater med $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ger funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$, så $dxdy = rdrd\theta$ och området ges av $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Integralen blir

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r\sin\theta}{r^4}rdrd\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi \Big[-r^{-1}\Big]_1^2 = 1.$$

4. Låt $f(x,y) = -3x + \frac{1}{3}x^3 + 2xy + y^2$, $g(x,y) = 2(x-4)^2 + (x+y)^2$.

(a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$. (2p)

(b) Klassificera om möjligt de stationära punkterna med hjälp av andraderivatorna i punkterna. (3p)

(c) Motivera varför $f(x,y)$ måste anta största och minsta värde på nivåkurvan $g(x,y)=2$ och bestäm dessa. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna fås av $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -3+x^2+2y \\ 2x+2y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x^2-2x-3 \\ y=-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (x+1)(x-3) \\ y=-x \end{cases}$. Så vi får de stationära punkterna $(-1,1)$ och $(3,-3)$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. I punkten $(-1,1)$ får vi $\det(H(-1,1)) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ vilket innebär att Hessianen är indefinit och $f(-1,1) = \frac{5}{3}$ är en sadelpunkt. I punkten $(3,-3)$ får vi $\det(H(3,-3)) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ och första komponent en (6) av $H(3,-3)$ är positiv gör att Hessianen är positivt definit och $f(3,-3) = -9$ är en lokal minpunkt.

(c) $g(x,y)$ är en summa av två icke-negativa termer. Vi får därför $(x-4)^2 \leq 1$ och $(x+y)^2 \leq 2$. Den första olikheten ger en begränsning för x. När man sar det ger den andra en begränsning för y, så $g(x,y)=2$ är en begränsad mängd. f är kontinuerlig och $g(x,y)=2$ är en kompakt mängd, så största och minsta värde existerar. Lagranges metod ger att max och min endast kan uppträda då ∇f och ∇g är parallella samtidigt som $g=2$. De är parallella om $0 = \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -3+x^2+2y & 2x+2y \\ -16+6x+2y & 2x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} -3+x^2+2y & 1 \\ -16+6x+2y & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y)(x^2-6x+13)$, men $x^2-6x+13 = (x-3)^2+4 > 0$, så $y=-x$ är enda möjligheten. $2 = g(x,y) = g(x,-x) = 2(x-4)^2 \Leftrightarrow 0 = (x-4)^2-1 = (x-5)(x-3)$. Vi har därför minsta och största värde $f(3,-3) = -9$, $f(5,-5) = \frac{5}{3}$.

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, z = 2-\sqrt{x^2+y^2}\}$, med följande metoder:

(a) Lämplig parametrisering av ytan. (3p)

(b) Gauss sats. (3p)

(Volym- och area-formler från gymnasiet får användas utan bevis.)

Lösning:

(a) På grund av att projektionen på xy-planet är en cirkelskiva kan vi använda parametrarna $r \in [0,2]$ och $\theta \in [0,2\pi]$ så att $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Vi får då

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 2-r \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\widehat{N}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dr d\theta = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r \end{bmatrix} dr d\theta.$$

Observera att z-komponenten av $\widehat{N}$ är positiv, så vi har rätt tecken på normalen. Flödet blir

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot \widehat{N} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r\end{bmatrix} drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 + rdrd\theta = 2\pi\Big[\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\pi.$$

(b) $\nabla\cdot\mathbf{F} = 2$. Ytan är inte sluten, så vi måste lägga till en bottenskiva $Y_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4, z=0\}$. Flödet genom bottenskivan med normal $\widehat{N} = [0,0,-1]^T$ blir

$$\iint_{Y_2}\mathbf{F}\cdot\widehat{N}dS = \iint_{Y_2} -1dxdy = -\text{Area}(Y_2) = -4\pi.$$

Låt K vara konen så att $\partial K = Y\cup Y_2$. Gauss sats ger flödet genom Y

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\widehat{N}dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}dV - \iint_{Y_2}\mathbf{F}\cdot\widehat{N}dS$$
$$= 2\text{Volym}(K) + 4\pi = 2\cdot 4\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + 4\pi = \frac{28}{3}\pi.$$

6. För $x>0$, låt $f(x) = \int_0^x e^t\ln(1+x-t)dt$. Visa att $f(x)$ uppfyller differentialekvationen $f'(x) - f(x) = \ln(1+x)$ för $x>0$. (3p)

Lösning: Integranden $g(x,t) = e^t\ln(1+x-t)$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$f'(x) = \int_0^x g'_x(x,t)dt + g(x,x)\frac{d}{dx}(x) = \int_0^x e^t(1+x-t)^{-1}dt$$
$$\underset{PI}{=} \Big[-\ln(1+x-t)e^t\Big]_{t=0}^x - \int_0^x -\ln(1+x-t)e^tdt = -\ln(1)e^x + \ln(1+x)e^0 + f(x).$$
$$\Rightarrow f'(x) - f(x) = \ln(1+x).$$

7. Låt D vara området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y=x^3$ och $x=y^2$ och låt ∂D vara den positivt orienterade randen. Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$ längs ∂D med hjälp av:

(a) Direkt parametrisering av randen. (3p)

(b) Greens sats. (2p)

Lösning:

(a) Kurvorna skär varandra i $(0,0)$ och $(1,1)$. Vi får $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, x^3\le y\le\sqrt{x}\}$. Låt γ_1 vara $y=x^3$ delen och γ_2 vara $y=\sqrt{x}$ delen. γ_1 kan parametriseras med $x=t$, $0\le t\le 1$. $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} t\\ t^3\end{bmatrix}$. Arbetet längs γ_1 blir

$$\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{bmatrix}-t^3\\ t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 3t^2\end{bmatrix}dt = 2\int_0^1 t^3dt = \frac{1}{2}.$$

För positiv orientering behöver γ_2 gå från höger till vänster. Baklänges får vi $-\gamma_2$ som kan parametriseras med $x=t$, $0\le t\le 1$. $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} t\\ \sqrt{t}\end{bmatrix}$. Arbetet längs γ_2 blir

$$\int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^1\begin{bmatrix}-\sqrt{t}\\ t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}t^{-1/2}\end{bmatrix}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}.$$

Tillsammans får vi arbetet $\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{5}{6}$.

VÄND!

(b) Greens sats ger

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big) dxdy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} 2dydx = 2\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{6}.$$

8. (a) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen, bågvist sammanhängande mängd (domän). Antag att $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ är C^0 och sådant att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen. Visa att $\mathbf{F}$ är ett konservativt fält. (5p)

(b) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^2 i en omgivning av en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
Bevisa att $f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a})$. (5p)

(c) Definiera begreppet *kvadrerbar mängd* i $\mathbb{R}^2$. (2p)

Lösning:

(a) Se sidan 349.

(b) Se beviset av Clairauts sats på kurshemsidan eller sida 87.

(c) Se sidan 242.

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$