MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2022-06-08 kl. 08.30–12.30
Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
Tentamen 031-772 5396

MVE035/600/036 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2022 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = \sqrt{3-x-y^2}$ och $F(x,y,z) = x^2 - z + xye^{yz}$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,1)$. (2p)

(b) Bestäm tangentplanet till $F(x,y,z) = -1$ i punkten $(1,-2,0)$. (2p)

(c) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = -1$ definierar en implicit funktion $z = h(x,y)$ i en omgivning av $(1,-2,0)$ och bestäm h'_x och h'_y i punkten. (2p)

2. Studera PDE:n $yf'_x - 2xf'_y = xy$ för $x > 0$, $y > 0$. Använd variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = 2x^2 + y^2 \\ v = x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

för att bestämma lösningen $f(x,y)$ till PDE:n som uppfyller bivillkoret $f(x,x) = \frac{1}{2}x^2 + 9x^4$ för alla $x > 0$. (4p)

3. (a) Låt $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le \pi/2, x \ge 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dxdy.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^6 y}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy.$$

(3p)

4. Låt $f(x,y) = x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3$.

(a) Bestäm alla stationära punkter. (2p)

(b) Använd Hessianen för att klassificera de stationära punkterna. (3p)

(c) Minimera $f(x,y)$ på området $D = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge x/2\}$. (4p)

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^3+y \\ y^3+z \\ z^3+x \end{bmatrix}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \ge 0$, med hjälp av Gauss sats. (4p)

6. Visa att $f(x) = \int_{-x}^{x} (x-t)e^{t^2}\,dt$ uppfyller differentialekvationen $xf'(x) - f(x) = 2x^2e^{x^2}$. (3p)

7. Låt γ vara skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ och planet $2 = -x + z$ genomlöpt i positiv led kring z axeln. Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y \\ x+z \\ -y \end{bmatrix}$ längs γ med följande metoder:

(a) Parametrisering av γ och kurvintegral. (3p)

(b) Stokes sats och ytintegral. (3p)

8. (a) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (2p)

(b) Låt P vara en C^1 funktion på $\mathbb{R}^2$. Antag att $D \subset \mathbb{R}^2$ är reguljärt i x-led och kompakt. Visa att

$$\oint_{\partial D} P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Detta är en del av beviset för Greens sats, så du får inte använda Greens sats eller någon av dess följdsatser i ditt bevis. (6p)

(c) Låt f och g vara C^1 funktioner av två variabler. Antag att $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ minimerar f under bivillkoret $g = 0$ och att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i definitionsmängderna till f och g. Visa att $\nabla f(\mathbf{a})$ och $\nabla g(\mathbf{a})$ är parallella. (4p)

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MVE035/600/036 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2022 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = \sqrt{3-x-y^2}$ och $F(x,y,z) = x^2 - z + xye^{yz}$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,1)$. (2p)

(b) Bestäm tangentplanet till $F(x,y,z) = -1$ i punkten $(1,-2,0)$. (2p)

(c) Motivera varför ekvationen $F(x,y,z) = -1$ definierar en implicit funktion $z = h(x,y)$ i en omgivning av $(1,-2,0)$ och bestäm h'_x och h'_y i punkten. (2p)

Lösning:

(a) $\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{3-x-y^2}}\begin{bmatrix}1/2\\ y\end{bmatrix}$, $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix}-1/2\\ -1\end{bmatrix}$, $H(x,y) = -\frac{1}{(3-x-y^2)^{3/2}}\begin{bmatrix}1/4 & y/2\\ y/2 & 3-x\end{bmatrix}$, $H(1,1) = \begin{bmatrix}-1/4 & -1/2\\ -1/2 & -2\end{bmatrix}$, $P(h,k) = f(1,1) + \nabla f(1,1)^T\begin{bmatrix}h\\ k\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix}H(1,1)\begin{bmatrix}h\\ k\end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{2}h - k - \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{2}hk - k^2$.

(b) $F(1,-2,0) = -1$, så punkten ligger på ytan. $\nabla F = \begin{bmatrix}2x + ye^{yz}\\ x(1+yz)e^{yz}\\ xy^2e^{yz} - 1\end{bmatrix}$. I punkten är gradienten $\nabla F(1,-2,0) = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ en normal till ytan, så tangentplanet blir $0(x-1) + 1(y+2) + 3(z-0) = 0$.
Svar: Tangentplanet är $y + 3z = -2$.

(c) Från (b) har vi att punkten ligger på ytan och $F'_z(1,-2,0) = 3$ så implicita funktionssatsen ger existens av en funktion h så att $z = h(x,y)$ i en omgivning av punkten. Satsen ger också $h'_x(1,-2,0) = \dfrac{-F'_x(1,-2,0)}{F'_z(1,-2,0)} = 0$, $h'_y(1,-2,0) = \dfrac{-F'_y(1,-2,0)}{F'_z(1,-2,0)} = \dfrac{-1}{3}$.

2. Studera PDE:n $yf'_x - 2xf'_y = xy$ för $x > 0$, $y > 0$. Använd variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = 2x^2 + y^2\\ v = x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

för att bestämma lösningen $f(x,y)$ till PDE:n som uppfyller bivillkoret $f(x,x) = \frac{1}{2}x^2 + 9x^4$ för alla $x > 0$. (4p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$f'_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 4xf'_u + 2xf'_v$$
$$f'_y = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = 2yf'_u + 4yf'_v$$

så PDE:n uttryckt i (u, v) blir

$$y(4xf'_u + 2xf'_v) - 2x(2yf'_u + 4yf'_v) = xy \Leftrightarrow -6xyf'_v = xy \Leftrightarrow f'_v = -\tfrac{1}{6}.$$

Den allmänna lösningen blir $f(u, v) = -\frac{1}{6}v + h(u)$, där $h \in C^1(\mathbb{R})$ är godtycklig. Uttryckt i (x, y) blir den $f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + 2y^2) + h(2x^2 + y^2)$. Bivillkoret ger $\frac{1}{2}x^2 + 9x^4 = -\frac{1}{2}x^2 + h(3x^2) \Rightarrow h(3x^2) = 9x^4 + x^2$. Då $x > 0$ kan vi sätta $x = \sqrt{t/3}$ och vi får $h(t) = t^2 + t/3$.
Svar: $f(x, y) = -\frac{1}{6}(x^2 + 2y^2) + (2x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{3}(2x^2 + y^2) = \frac{1}{2}x^2 + 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4$.

3. (a) Låt $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq \pi/2, x \geq 0\}$. Beräkna (3p)

$$\iint_D \sin(x^2 + y^2)dxdy.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^6 y}{(x^2 + y^2)^3} dxdy.$$

(3p)

Lösning:

(a) Byte till polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ger att området beskrivs av $0 \leq r \leq \sqrt{\pi/2}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Areaelementet blir $dxdy = rdrd\theta$ och integralen blir

$$\iint_D \sin(x^2 + y^2)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(r^2) r dr d\theta \underset{u=r^2}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin u du$$
$$= \frac{\pi}{2} \Big[-\cos u\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Integralen blir mycket enklare ifall vi använder Fubini för att kasta om integrationsordningen. Området kan beskrivas med olikheterna $0 \leq y \leq x \leq 1$, så vi får

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{x^6 y}{(x^2 + y^2)^3} dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^6 y}{(x^2 + y^2)^3} dydx \underset{u=x^2+y^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} \frac{x^6}{u^3} dudx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{x^6}{2u^2}\right]_{x^2}^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{3}{4} x^2 dx = \frac{1}{16} \left[x^3\right]_0^1 = \frac{1}{16}.$$

4. Låt $f(x, y) = x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3$.

(a) Bestäm alla stationära punkter. (2p)

(b) Använd Hessianen för att klassificera de stationära punkterna. (3p)

(c) Minimera $f(x, y)$ på området $D = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq x/2\}$. (4p)

Lösning:

(a) De stationära punkterna löser $\mathbf{0} = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y \\ -2x - y + 2y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y(2y - 3) = 0 \end{cases}$.
Så vi får de stationära punkterna $(0, 0)$ och $(3/2, 3/2)$.

(b) Hessianen blir $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 + 4y \end{bmatrix}$. För punkten $(0, 0)$ får vi egenvärden för Hessianen via $0 = \det(H(0, 0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$. Egenvärdena $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ har olika tecken, så $H(0, 0)$ är indefinit och $(0, 0)$ är en sadelpunkt. För punkten $(0, 0)$ får vi egenvärden för Hessianen via $0 = \det(H(3/2, 3/2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$. Egenvärdena $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ är båda positiva, så $H(3/2, 3/2)$ är positivt definit och $(3/2, 3/2)$ är en lokal minpunkt.

(c) På randen har vi antingen $y = x/2$ eller $x = 0$. $g(x) = f(x, x/2) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{12}x^3$. $0 = g'(x) = \frac{1}{4}(x-1)x$ så punkterna $(0,0)$ och $(1,1/2)$ är kandidater. $h(y) = f(0,y) = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3$. $0 = h'(y) = y(2y-1)$ så även $(0,1/2)$ är en kandidat. I polära koordinater får vi $f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta + \frac{2}{3}r^3\sin^3\theta$. Begränsar vi till en cirkel med radie r, får vi även en rand med vikel $\arctan(1/2) \le \theta \le \pi/2$. På grund av att $\sin\theta > 0$ där så får vi att r^3 termen är positiv och dominerar ifall r är tillräckligt stor, så minimum kan inte inträffa för stora r. Därför måste minium inträffa i någon av kandidatpunkterna eller den inre punkten från (b) uppgiften.

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1/2) = -1/24, \quad f(0,1/2) = -1/24, \quad f(3/2,3/2) = -9/8. \quad (1)$$

Svar: Minsta värdet på D är $f(3/2,3/2) = -9/8$.

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x^3 + y \\ y^3 + z \\ z^3 + x \end{bmatrix}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $Y = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0\}$, med hjälp av Gauss sats. (4p)

Lösning: Halvsfären Y är inte en sluten yta, så vi behöver lägga till botten ytan $B = \{(x,y,0) | x^2 + y^2 \le 4\}$ som har normal $\hat{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ som pekar ut ur området. Låt $K = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0\}$ vara halvklotet med rand $\partial K = Y + B$. Polära koordinater ger $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$ och K ges av $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Gauss sats ger

$$\begin{aligned}
\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 3r^2 r \sin\theta dr d\theta d\phi + \iint_S (z^3 + x) dS \\
&= 2\pi \int_0^2 3r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 6\pi \Big[\tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^2 \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 24\pi.
\end{aligned}$$

Integralen över S blev noll pga $z = 0$ på ytan och integralen av x försvinner pga symmetri.
Svar: Flödet upp genom Y är 24π.

6. Visa att $f(x) = \int_{-x}^{x} (x - t)e^{t^2} dt$ uppfyller differentialekvationen $xf'(x) - f(x) = 2x^2 e^{x^2}$. (3p)

Lösning: Integranden $g(x,t) = (x - t)e^{t^2}$ och gränserna är kontinuerligt deriverbara, så vi får

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{-x}^{x} g'_x(x,t) dt + g(x,x)\frac{d}{dx}(x) - g(x,-x)\frac{d}{dx}(-x) = \int_{-x}^{x} e^{t^2} dt + 2xe^{x^2}, \\
xf'(x) - f(x) &= \int_{-x}^{x} xe^{t^2} dt + 2x^2 e^{x^2} - \int_{-x}^{x} (x - t)e^{t^2} dt \\
&= 2x^2 e^{x^2} + \int_{-x}^{x} \underbrace{te^{t^2}}_{\text{udda}} dt = 2x^2 e^{x^2}.
\end{aligned}$$

7. Låt γ vara skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ och planet $2 = -x + z$ genomlöpt i positiv led kring z axeln. Beräkna arbetet av $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y \\ x + z \\ -y \end{bmatrix}$ längs γ med följande metoder:

(a) Parametrisering av γ och kurvintegral. (3p)

(b) Stokes sats och ytintegral. (3p)

 VÄND!

Lösning: Projektionen av γ på xy-planet kan beräknas genom att sätta in $z = 2 + x$ i ellipsoiden. $4 = x^2 + 2y^2 + (x+2)^2 = 2(x+1)^2 + 2 + 2y \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 + y^2$, dvs en cirkel med radie 1 kring $(-1, 0)$ parametriserad moturs.

(a) En naturlig parametrisering ges av $x + 1 = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 + x$, dvs

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} -1 + \cos t \\ \sin t \\ 1 + \cos t \end{bmatrix}, \; 0 \le t \le 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Arbetet blir

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\big(\cos(t)\big)^2 + 2\big(\sin(t)\big)^2 dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi.$$

(b) Låt Y var den delen av ytan $2 = -x + z$ som begränsas av γ. Den ytan kan ses som en funktionsgraf $z = f(x, y) = 2 + x$ med $\hat{N} dS = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dxdy.$
Observera att normalen pekar uppåt vilket ger motus orientering av randen $\partial Y = \gamma$. Projektionen på xy-planet är $\pi(Y) = \{(x, y) | (x+1)^2 + y^2 \le 1\}$. Stokes sats och $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS = \iint_{\pi(Y)} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = 4\mu(\pi(Y)) = 4\pi.$$

8. (a) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (2p)

(b) Låt P vara en C^1 funktion på $\mathbb{R}^2$. Antag att $D \subset \mathbb{R}^2$ är reguljärt i x-led och kompakt. Visa att

$$\oint_{\partial D} P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Detta är en del av beviset för Greens sats, så du får inte använda Greens sats eller någon av dess följdsatser i ditt bevis. (6p)

(c) Låt f och g vara C^1 funktioner av två variabler. Antag att $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ minimerar f under bivillkoret $g = 0$ och att $\mathbf{a}$ är en inre punkt i definitionsmängderna till f och g. Visa att $\nabla f(\mathbf{a})$ och $\nabla g(\mathbf{a})$ är parallella. (4p)

Lösning:

(a) Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara inre punkt i D_f. f är då differentierbar i $\mathbf{a}$ om det finns en konstant vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så att $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ och

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho(\mathbf{h}).$$

Då gäller även $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{A}$.

(b) Se boken Sats 9.2.1.

(c) Se boken Sats 4.3.1.

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$