MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2022-03-12 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Tentamen

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = ye^{x^2-1}$

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ i riktningen $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ och använd detta för att approximera $f(1.1, 0.8)$. (3p)

2. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

(a) Visa att det finns en omgivning av $(x,y) = (1,1)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$yf'_x + x^3 f'_y = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}$$

3. Bestäm

$$\iint_D \ln(3x+y)\,dxdy,$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq 3x + y \leq 2\}$. (3p)

4. Låt $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$, och $g(x,y) = x^2 + y^2$

(a) Bestäm och klassificera alla stationära punkter till f i hela $\mathbb{R}^2$. (4p)

(b) Minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 2$. (3p)

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sin(y) - y \\ x\cos(y) \end{bmatrix}$ och $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^4\}$.

(a) Använd Greens sats för att beräkna $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (3p)

(b) Skriv $\mathbf{F} = \nabla\phi + \mathbf{G}$ där $\phi : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbf{G}$ så enkel som möjligt. (2p)

(c) Beräkna sedan $\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ med explicit parametrisering av randen. (2p)

(d) Använd sedan detta och lämplig teori för att beräkna $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (1p)

6. Beräkna den totala massan av ett föremål som ockuperar området

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\}$$

och har densitet $\rho(x, y, z) = z^4$. (4p)

7. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2y \\ -\sin(2x) \\ z \end{bmatrix}$, $g(x, y, z) = \sin^2 x + y^2 + z$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan Y som beskrivs av $g(x, y, z) = 1$, $z \geq 0$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ med följande metod

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Direkt parametrisering av ytan. (3p)

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ är differentierbara överallt. Bevisa att (6p)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}$$

(b) Bevisa att kurvintegralen av ett konservativt fält i $\mathbb{R}^n$ är en potentialdifferens. (3p)

(c) Använd en generaliserad dubbelintegral för att visa $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (3p)

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER **Hjälpmedel: bifogat formelblad, inga andra hjälpmedel**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2022-03-12 kl. 08.30–12.30

Examinator: Thomas Bäckdahl Telefonvakt: Thomas Bäckdahl

Lösningsförslag

MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.
Maximalt antal poäng är 50, och betygsgränserna är 20 för 3 (godkänd), 30 för 4 och 40 för 5. Bonuspoäng från 2022 räknas med. För godkänt på tentan krävs också godkänt på tavelpresentationsmomentet.
Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $f(x,y) = ye^{x^2-1}$

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ i riktningen $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. (1p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f i punkten $(x,y) = (1,1)$ och använd detta för att approximera $f(1.1, 0.8)$. (3p)

Lösning:

(a) Normerad blir riktningen $\mathbf{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. $\nabla f = e^{x^2-1}\begin{bmatrix} 2xy \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Svar: Riktningsderivatan blir $f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(1,1) = 2/5$.

(b) Hessianen blir $H(x,y) = e^{x^2-1}\begin{bmatrix} 2y + 4x^2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Taylorpolynomet blir $P(h,k) = f(1,1) + \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \nabla f(1,1) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(1,1) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} =$ $1 + (2h + k) + \frac{1}{2}(6h^2 + 4hk)$
Svar: $P(h,k) = 1 + 2h + k + 3h^2 + 2hk$ och $f(1.1, 0.8) \approx P(0.1, -0.2) = 0.99$.

2. Studera variabelbytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

(a) Visa att det finns en omgivning av $(x,y) = (1,1)$ där variabelbytet är inverterbart. (2p)

(b) Använd variabelbytet för att bestämma den allmänna lösningen $f(x,y)$ för $x > 0$, $y > 0$ till PDE:n (3p)

$$yf'_x + x^3 f'_y = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}$$

Lösning:

(a) Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} x^3 & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^4 + y^2.$$

I punken är den nollskilld. Inversa funktionssatsen ger att variabelbytet är inverterbart i en omgivning av punkten.

(b) Kedjeregeln ger

$$f'_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = x^3 f'_u + y f'_v$$
$$f'_y = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = -y f'_u + x f'_v$$

så PDE:n uttryckt i (u, v) blir

$$y(x^3 f'_u + y f'_v) + x^3(-y f'_u + x f'_v) = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} \Leftrightarrow (x^4 + y^2) f'_v = \frac{y^2 + x^4}{x^2 y^2} \Leftrightarrow f'_v = v^{-2}.$$

Den allmänna lösningen blir $f(u, v) = -v^{-1} + h(u)$, där $h \in C^1(\mathbb{R})$ är godtycklig.
Svar: $f(x, y) = -\frac{1}{xy} + h(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2)$ där $h \in C^1(\mathbb{R})$ är en godtycklig funktion.

3. Bestäm

$$\iint_D \ln(3x + y)dxdy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq 3x + y \leq 2\}$. (3p)

Lösning: Vi integrerar med hjälp av nivåytor. Låt $g(x, y) = 3x + y$, $h(u) = \ln(u)$ och $D_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq 3x + y \leq u\}$ för $1 \leq u \leq 2$. Arean av D_u är $A(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{3} \cdot u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{u^2-1}{6} \Rightarrow A'(u) = u/3$. Integralen blir

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(3x + y)dxdy &= \int_1^2 h(u)A'(u)du = \frac{1}{3}\int_1^2 \ln(u)udu \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2}\ln(u)\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{u}du = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4. Låt $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$, och $g(x, y) = x^2 + y^2$

(a) Bestäm och klassificera alla stationära punkter till f i hela $\mathbb{R}^2$. (4p)

(b) Minimera $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 2$. (3p)

Lösning:

(a) $\nabla f = e^{-x^2-y^2}\begin{bmatrix}1 - 2x^2 - 2xy \\ 1 - 2xy - 2y^2\end{bmatrix}$. $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow -x^2 + y^2 = 0$ och $1 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ som har lösningarna $(1/2, 1/2)$ och $(-1/2, -1/2)$. Dessa är de stationära punkterna. Hessianen blir $H(x, y) = 2e^{-x^2-y^2}\begin{bmatrix}-3x + 2x^3 - y + 2x^2y & -x - y + 2x^2y + 2xy^2 \\ -x - y + 2x^2y + 2xy^2 & -x - 3y + 2xy^2 + 2y^3\end{bmatrix}$.
I de stationära punkterna får vi $H(\pm 1/2, \pm 1/2) = \mp e^{-1/2}\begin{bmatrix}3 & 1 \\ 1 & 3\end{bmatrix}$. Låt $A = \begin{bmatrix}3 & 1 \\ 1 & 3\end{bmatrix}$.
Egenvärdena för A ges av rötterna till $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda\end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = (2 - \lambda)(4 - \lambda)$. Båda egenvärdena $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$ är positiva så A är positivt definit. $H(1/2, 1/2)$ är därför negativt definit och $(1/2, 1/2)$ är en lokal maxpunkt $f(1/2, 1/2) = e^{-1/2}$. $H(-1/2, -1/2)$ är positivt definit och $(-1/2, -1/2)$ är en lokal minpunkt $f(-1/2, -1/2) = -e^{-1/2}$.

(b) Vi får en extrempunkt om bivillkoret är uppfyllt och om ∇f och ∇g är parallella, dvs

$$0 = \frac{d(f, g)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix}1 - 2x^2 - 2xy & 1 - 2xy - 2y^2 \\ 2x & 2y\end{vmatrix} = 2y - 2x,$$

dvs $y = x$. Stoppar vi in det i $2 = g(x, y) = 2x^2$ får vi $y = x = \pm 1$. Området är kompakt och saknar rand, så detta ger max och minpunkterna. Tecknet avgörs av tecknet på $y = x$.
Svar: $f(-1, -1) = -2e^{-2}$.

5. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sin(y) - y \\ x\cos(y) \end{bmatrix}$ och $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 1 - x^2 \le y \le 1 - x^4\}$.

(a) Använd Greens sats för att beräkna $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (3p)

(b) Skriv $\mathbf{F} = \nabla\phi + \mathbf{G}$ där $\phi : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^2$ och $\mathbf{G}$ så enkel som möjligt. (2p)

(c) Beräkna sedan $\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ med explicit parametrisering av randen. (2p)

(d) Använd sedan detta och lämplig teori för att beräkna $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (1p)

Lösning:

(a) Låt $P = F_1 = \sin(y) - y$ och $Q = F_2 = x\cos(y)$. Greens sats ger

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{1-x^2}^{1-x^4} 1 dy dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^4 - 1 + x^2) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

(b) Med $\phi = x\sin(y)$ får vi $\nabla\phi = \begin{bmatrix} \sin(y) \\ x\cos(y) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \nabla\phi = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Låt $\gamma_i = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, y = f_i(x)\}$, $i = 1, 2$ med $f_1(x) = 1 - x^2$ och $f_2(x) = 1 - x^4$ med parametrisering $\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ f_i(x) \end{bmatrix}$, $x \in [-1, 1]$.

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \mathbf{G}(\mathbf{r}(x)) \cdot \mathbf{r}'(x) dx = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -f_i(x) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ f_i'(x) \end{bmatrix} dx = -\int_{-1}^{1} f_i(x) dx,$$

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = -\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3},$$
$$\int_{\gamma_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-1}^{1} (1 - x^4) dx = -\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -\frac{8}{5}.$$

(d) Med positiv orientering blir $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$ så $\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{5} = \frac{4}{15}$. $\nabla\phi$ är ett konservativt fält så $\oint_{\partial D} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$. Detta innebär $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4}{15}$.

6. Beräkna den totala massan av ett föremål som ockuperar området

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 2z^2 \le 1\}$$

och har densitet $\rho(x,y,z) = z^4$. (4p)

Lösning: Då föremålet är en ellipsiod, kan vi använda anpassade koordinater

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

Området blir då $1 \ge r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + r^2\cos^2\theta = r^2$, dvs $0 \le r \le 1$. Funktionaldeterminanten blir $\dfrac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} = \dfrac{r^2 \sin\theta}{2}$. Massan blir

$$M = \iiint_D \rho dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sqrt{2})^{-4} r^4 \cos^4\theta \frac{r^2 \sin\theta}{2} d\phi d\theta dr$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^6 dr \int_0^\pi \cos^4\theta \sin\theta d\theta \underset{u = -\cos\theta}{=} \frac{\pi}{4} \left[\frac{r^7}{7}\right]_0^1 \int_{-1}^{1} u^4 du = \frac{\pi}{28} \left[\frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{70}.$$

7. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2y \\ -\sin(2x) \\ z \end{bmatrix}$, $g(x, y, z) = \sin^2 x + y^2 + z$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan Y som beskrivs av $g(x, y, z) = 1$, $z \geq 0$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ med följande metod

(a) Gauss sats. (4p)

(b) Direkt parametrisering av ytan. (3p)

Lösning:

(a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin(2x)) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1$. Låt $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 1 - \sin^2 x - y^2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq z \leq \cos^2 x - y^2\}$. Randen ∂K består av Y och ytan $Y_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y^2 \leq \cos^2 x\}$. Ytan Y_2 har enhetsnormal ut ur K: $\hat{N} = -\hat{z}$, så $\mathbf{F} \cdot \hat{N} = -z = 0$ på Y_2. Därför blir flödet genom Y_2 noll. Gauss sats ger

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= \iiint_K 1 dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\cos x}^{\cos x} \int_0^{\cos^2 x - y^2} dz dy dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\cos x}^{\cos x} (\cos^2 x - y^2) dy dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3} \cos^3 x dx \\
&= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos(x) dx \underset{u=\sin(x)}{=} \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1 - u^2) du = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

Normalen till Y är ut ur ytan, dvs upp, vilket ger det efterfrågade flödet 16/9.

(b) Ytan är grafen $z = f(x, y) = \cos^2 x - y^2$ för $|y| \leq \cos x, |x| \leq \pi/2$, så parametriseringen $\mathbf{r}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$ ger $\hat{N} dS = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy$ och

$$\begin{aligned}
f'_x &= 2\cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x), \\
f'_y &= -2y, \\
\mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= \begin{bmatrix} 2y \\ -\sin(2x) \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy = 2\sin(2x)y - 2\sin(2x)y + z = z = \cos^2 x - y^2,
\end{aligned}$$

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\cos x}^{\cos x} (\cos^2 x - y^2) dy dx = \frac{16}{9}.$$

8. (a) Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ är differentierbara överallt. Bevisa att (6p)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}$$

(b) Bevisa att kurvintegralen av ett konservativt fält i $\mathbb{R}^n$ är en potentialdifferens. (3p)

(c) Använd en generaliserad dubbelintegral för att visa $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (3p)

Lösning:

(a) Se filen med bevis av sats 2.3.4 på Canvas sidan.

(b) Se sidan 346 i boken.

(c) Se sidan 277 i boken.

Formelblad MVE035 och MVE600

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}, \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big).$$

Primitiva funktioner

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$
$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ 0 < a \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C,\ a \neq 0,$$
$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\big) + C,$$
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_n, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$
$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad |x| < 1,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{O}(x^{n+1}), \quad -1 < x \leq 1,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}), \quad |x| \leq 1,$$
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$