

Tentamen

MVE035/036/600 Flervariabelanalys F/TM

2021-08-24 kl. 09.00–12.00 (09.00 - 13.30 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475, 031-7725371

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2021 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 14 September. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS! Externa **hjälpmedel** är tillåtna men alla stegen i dina resonemang och beräkningar måste motiveras väl i skrift. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Om du i en lösning åberopar en sats från kursboken så behöver du *inte* inkludera ett bevis av satsen.

Uppgifterna

1. Låt

$$F(x, y, z) = xe^{xz} + z^2y + xy^2, \quad G(x, y, z) = x + y + z, \quad H_a(x, y, z) = ax^2 + y^2 + z^2 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- (a) i. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 4$ i punkten $(2, 1, 0)$.
ii. Bestäm riktningsderivatan för F i punkten $(2, 1, 0)$ och i riktning mot punkten $(-3, 2, 2)$.
iii. Bestäm en riktningsvektor för tangenten till skärningskurvan mellan ytorna $F = 4$ och $G = 3$ i punkten $(2, 1, 0)$. (6p)
- (b) För varje $a \in \mathbb{R}$ säg huruvida den kvadratiske formen H_a är positiv definit, negativ definit, indefinit, positiv semidefinit eller negativ semidefinit. Motivering behövs ej ! (1p)
- (c) Bevisa att $F(x, y, z) = 4$ definierar en C^1 -funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av $(2, 1, 0)$, och bestäm f_x , f_y och f_{xy} i punkten $(2, 1)$. (4p)

(d) För $a \in \mathbb{R}$, låt $\mathbf{F}_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av $\mathbf{F}_a(x, y, z) = \begin{bmatrix} F(x, y, z) \\ G(x, y, z) \\ H_a(x, y, z - 1) \end{bmatrix}$. (3p)

Bevisa att $\mathbf{F}_a$ är injektiv i en omgivning av punkten $(2, 1, 0)$ för alla $a \in \mathbb{R}$.

Var god vänd!

2. Transformera PDE:n

(7p)

$$f_{xx} + 20f_{xy} + 100f_{yy} = 0$$

genom att införa de nya variablerna $u = 5x + ay$, $v = y$. Välj $a \in \mathbb{R}$ lämpligt så att du får en lösbar ekvation. Bestäm sedan PDE:ns allmänna lösning.

3. Beräkna

(4p)

$$\iint_D x \cos y^2 \, dx \, dy,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$D = \{x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^{2/3} \leq y \leq 1\}.$$

4. Betrakta föremålet som ockuperar området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ givet av

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

och vars densitet varierar enligt $\rho(x, y, z) = x + y$.

(a) Utan att beräkna något, vad kan man säga om förhållandet mellan x - och y -koordinaterna av föremålets masscentrum. Motivera väl !

(1p)

(b) Beräkna masscentrumets z -koordinat.

(4.5p)

5. Låt

$$\gamma = \{(10 \cos t, -\sin t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

(a) Gamma är en Fyll i rätt ord ! Sedan skissa banan, där du indikerar färdriktningen med pilar.

(1.5p)

(b) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara fältet

(4p)

$$\mathbf{F}(x, y) = (\cos^3 x + 3y(\sin^3 x - x^2), \cos^3 x + \sin^3 y).$$

Bestäm $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

6. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara fältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -y/2, x^2)$$

och låt Y_1, Y_2 vara följande ytor:

$$Y_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4, z = x^2 + y^2\},$$

$$Y_2 = \{(x, y, z) : z = x + y^2, y^2 \leq x \leq y\}.$$

(a) Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y_1 med hjälp av Gauss sats.

(4.5p)

(b) Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ upp genom Y_2 utan hjälp av Gauss sats.

(4.5p)

7. Bevisa att

(5p)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Go n'eirí an bóthar libh!

#1

$$(a) \quad F_x = e^{xz} + xze^{xz} + y^2 \stackrel{(2,1,0)}{=} 2$$

$$F_y = z^2 + 2xy \stackrel{(2,1,0)}{=} 4$$

$$F_z = x^2 e^{xz} + 2zy \stackrel{(2,1,0)}{=} 4$$

Tangentplanet :

$$F_x(x-x_0) + F_y(y-y_0) + F_z(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2) + 4(y-1) + 4(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 2z = 4 \quad \underline{\text{Svar}}$$

$$u = (-3, 2, 2) - (2, 1, 0) = (-5, 1, 2)$$

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} (-5, 1, 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \nabla F \cdot \hat{u} = \frac{(2, 4, 4) \cdot (-5, 1, 2)}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{30}} \quad \underline{\text{Svar}}$$

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

$$\underline{\text{Svar}} : (0, 1, -1).$$

(b) $a > 0$: Positiv definit
 $a = 0$: Positiv semidefinit
 $a < 0$: Indefinit

(c) $F_z \neq 0$ så Implicita Funktionsatsen säger att $z = f(x, y)$ för någon $f \in C^1$ i en omgivning av $(2, 1, 0)$

$$f_x = -F_x/F_z = -2/4 = -1/2$$

$$f_y = -F_y/F_z = -4/4 = -1$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_z} \right)$$

$$= \frac{F_z \left(\frac{\partial}{\partial y} F_x \right) - F_x \frac{\partial}{\partial y} (F_z)}{F_z^2} \stackrel{(2,1,0)}{=} \frac{4 \frac{\partial F_x}{\partial y} - 2 \frac{\partial F_z}{\partial y}}{16}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{1}{8} \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\text{Först: } \frac{\partial}{\partial y} F_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 + (1+xz)e^{xz} \right)$$

$$= 2y + (1+xz)e^{xz} \times f_y + e^{xz} \times f_y$$

$$\stackrel{(2,1,0)}{=} 2(1) + (1+0)e^0(2)(-1) + e^0(2)(-1) = -2$$

$$\text{Sedan: } \frac{\partial}{\partial y} F_z = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 e^{xz} + 2yz \right)$$

$$= x^2 e^{xz} x f_y + 2(z + y f_y)$$

$$\stackrel{(2,1,0)}{=} 4e^0 \cdot 2 \cdot (-1) + 2(0 + 1(-1)) = -10$$

$$\text{Alltså: } f_{xy} = \frac{1}{4}(-2) - \frac{1}{8}(-10) = \frac{3}{4}$$

$\uparrow$
 SVAR.

$$(d) \quad \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_{x,a} & H_{y,a} & H_{z,a} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Se } (a) & & \\ 1 & 1 & 1 \\ 2ax & 2y & 2(z-1) \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{(2,1,0)}{=} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4a & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinanten blir,

$$2(-2-2) - 4(-2-4a) + 4(2-4a) = 8$$

Determinanten är alltså nollskild, oberoende av a .

Därmed medför Inversa funktionsatsen att F_a är injektiv i en omgivning av $(2,1,0)$ för varje $a \in \mathbb{R}$.

#2

$$\text{Vi tar } u = 5x + ay \\ v = y$$

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x^0 = 5f_u$$

$$f_y = f_u u_y + f_v v_y = af_u + f_v$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x} (5f_u) = 5 \frac{\partial}{\partial x} f_u$$

$$= 5 \left[\frac{\partial}{\partial u} f_u \cdot u_x + \frac{\partial}{\partial v} f_u \cdot v_x^0 \right]$$

$$= 5 (f_{uu} \cdot 5) = 25 f_{uu}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x} (af_u + f_v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} (af_u + f_v) \cdot u_x + \frac{\partial}{\partial v} (af_u + f_v) \cdot v_x^0$$

$$= 5 (af_{uu} + f_{uv})$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y} (af_u + f_v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} (af_u + f_v) \cdot u_y + \frac{\partial}{\partial v} (af_u + f_v) \cdot v_y$$

$$= a(a f_{uu} + f_{uv}) + 1 \cdot (a f_{uv} + f_{vv})$$

$$= a^2 f_{uu} + 2a f_{uv} + f_{vv}$$

Insättning in i PDEn:

$$f_{xx} + 20 f_{xy} + 100 f_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow 25 f_{uu} + 20 \cdot (5)(a f_{uu} + f_{uv})$$

$$+ 100(a^2 f_{uu} + 2a f_{uv} + f_{vv}) = 0$$

$$\Rightarrow (25 + 100a + 100a^2) f_{uu}$$

$$+ (100 + 200a) f_{uv} + 100 f_{vv} = 0$$

Om vi tar $a = -\frac{1}{2}$ så blir koefficienterna framför både f_{uu} och f_{uv} noll. Med detta val har vi

$$100 f_{vv} = 0 \Rightarrow f_{vv} = 0$$

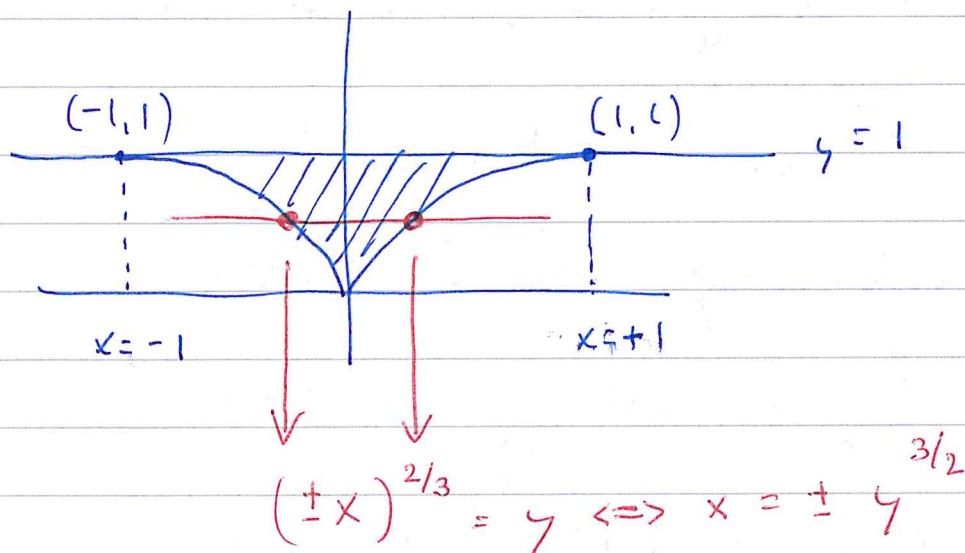
$$\Rightarrow f_v = \int 0 \, dv = C_1(u)$$

$$\Rightarrow f = \int C_1(u) \, dv = C_1(u) \cdot v + C_2(u)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = F(5x - \frac{1}{2}) \cdot y + G(5x - \frac{1}{2}),$$

där F, G är valfria C^2 -funktioner av en variabel.

#3



Om vi byter integrationsordning kan vi i stället skriva D som

$$D : \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -y^{3/2} \leq x \leq y^{3/2} \}$$

Så integralen blir:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_{-y^{3/2}}^{y^{3/2}} x \cos y^2 dx \\ &= \int_0^1 \cos y^2 dy \int_{-y^{3/2}}^{y^{3/2}} x dx \\ &= \int_0^1 \cos y^2 dy \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-y^{3/2}}^{y^{3/2}} \\ &= \int_0^1 y^3 \cos y^2 dy \end{aligned}$$

Sätt $u = y^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2} u \cos u \, du$$

Partiell integration $\Rightarrow$

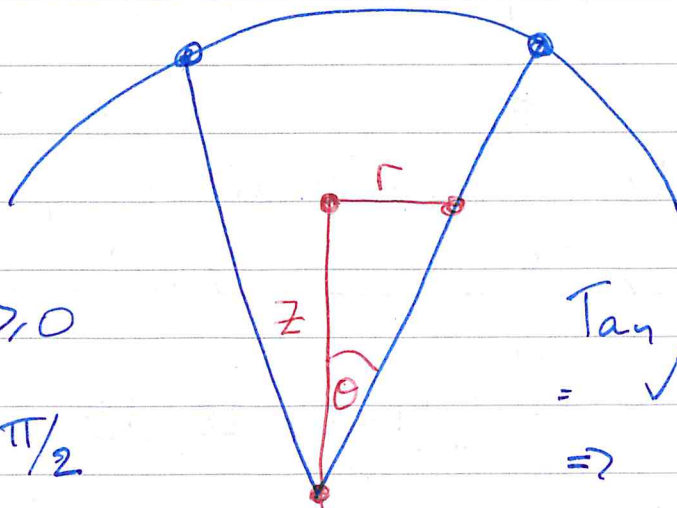
$$\frac{1}{2} \left[u \sin u + \cos u \right]_{u=0}^{u=1}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 1 + \cos 1 - 0 - 1)$$

Svar: $\frac{1}{2} (\sin 1 + \cos 1 - 1)$.

4

D är området mellan en kon och en sfär så det är lämpligt att byta till sfäriska koordinater



$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \phi \leq \pi/2$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= r/z \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} / z = 1/\sqrt{3} \\ \Rightarrow \theta &= \pi/6 \end{aligned}$$

Dessutom pga symmetri hos både D
 och ρ vet vi från början att $\bar{m}_x = \bar{m}_y$.

$$\bar{m}_x = \frac{\iiint_D x \rho dV}{\iiint_D \rho dV}$$

$$\bar{m}_z = \frac{\iiint_D z \rho dV}{\iiint_D \rho dV}$$

Först : $\iiint_D \rho dV = \iiint_D (x+y) dV$

Symm.
= $2 \iiint_D x dV$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho \sin \theta \cos \phi (\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi)$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi}_1 \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin^2 \theta d\theta}_{\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta} \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{1/4}$$

→ nästa sida

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/6} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} = \frac{1}{24} (2\pi - 3(\sqrt{3}-1))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_D \rho \, dV = \frac{1}{48} (2\pi - 3(\sqrt{3}-1)) \quad \dots (*)$$

För det andra : $\iiint_D x \rho \, dV$

$$= \iiint_D x(x+y) \, dV = \iiint_D x^2 \, dV + \iiint_D xy \, dV$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi (\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi)$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 \rho \sin \theta \cos \phi \rho \sin \theta \sin \phi (\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi}_A \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta \, d\theta}_B \underbrace{\int_0^1 \rho^4 \, d\rho}_C \rightarrow$$

$$+ \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi}_D \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta d\theta}_{E=B} \underbrace{\int_0^1 \rho^4 d\rho}_{F=C}$$

$$C = F = 1/5 \quad \text{tydligen}$$

$$B = E = \int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin \theta d\theta}_{\cos \theta \Big|_0^{\pi/6}} - \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta}_{u = \cos \theta}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 u^2 du = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\phi) d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi/4$$

$$D = \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \stackrel{u = \sin \phi}{=} \int_0^1 u du = 1/2$$

Lägg ihop allting $\Rightarrow$

$$\iiint_D x \rho \, dV$$

$$= \pi/60 \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 1/30 \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= 1/60 \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) (\pi + 2) \quad \dots \quad (**)$$

För det tredje:

$$\iiint_D z \rho \, dV = \iiint_D z(x+y) \, dV$$

Symm.

$$= 2 \iiint_D x z \, dV$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 (\rho \sin \theta \cos \phi) (\rho \cos \theta) (\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi)$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \phi \, d\phi}_1 \underbrace{\int_0^{\pi/6} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta}_{u = \sin \theta} \underbrace{\int_0^1 \rho^4 \, d\rho}_{1/5}$$

$$\int_0^{1/2} u^2 \, du = 1/24$$

$$\Rightarrow \iiint_D z \rho \, dV = 1/120 \quad \dots \quad (***)$$

Från (*), (**) och (***) härleder vi att

$$\begin{aligned}\bar{m}_x = \bar{m}_y &= \frac{\frac{1}{60} (\pi+2) \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{48} (2\pi - 3(\sqrt{3}-1))} \\ &= \frac{\frac{4}{5} (\pi+2) \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}\right)}{2\pi - 3(\sqrt{3}-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{m}_z &= \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{48} (2\pi - 3(\sqrt{3}-1))} = \frac{3}{8(2\pi - 3(\sqrt{3}-1))}\end{aligned}$$

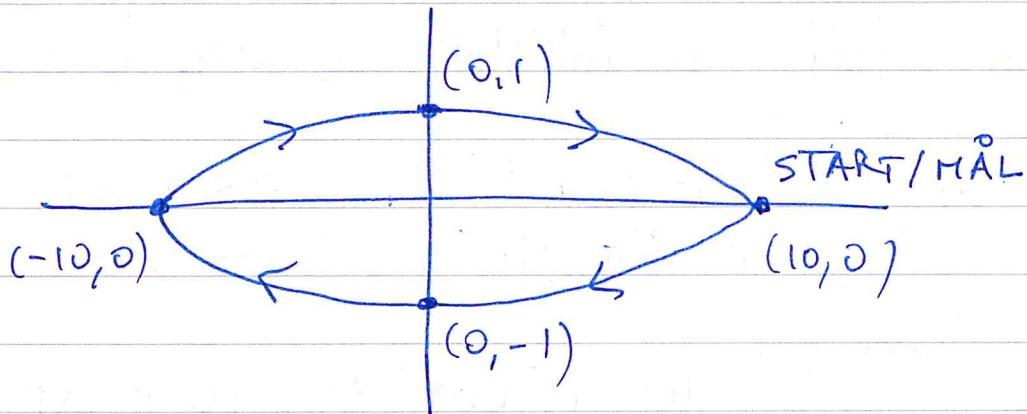
Svar Masscentrumet ligger i

$$\left(\frac{4(\pi+2)(3\sqrt{3}-1)}{15\sqrt{3}(2\pi-3(\sqrt{3}-1))}, \frac{4(\pi+2)(3\sqrt{3}-1)}{15\sqrt{3}(2\pi-3(\sqrt{3}-1))}, \frac{3}{8(2\pi-3(\sqrt{3}-1))} \right)$$

#5

(a) γ är ellipsen $\frac{x^2}{100} + y^2 = 1$,

genomlöst medurs med start och slut i punkten $(10, 0)$.



(b) Om D är ellipsens insida så gäller enligt Greens Sats att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

medurs

$$= - \iint_D \left[3 \cos^2 x (-\sin x) - 3(\sin^3 x - x^2) \right] dx dy$$

$$= -3 \iint_D \left[(1 - \sin^2 x)(-\sin x) - (\sin^3 x - x^2) \right] dx dy$$

$$= -3 \iint_D (x^2 - \sin x) dx dy$$



Men $\iint_D \sin x \, dx \, dy = 0$ av symmetriskhet

$$\Rightarrow -3 \iint_D x^2 \, dx \, dy$$

Vi byter till elliptiskt polära koordinater

$$x = 10r \cos \theta \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

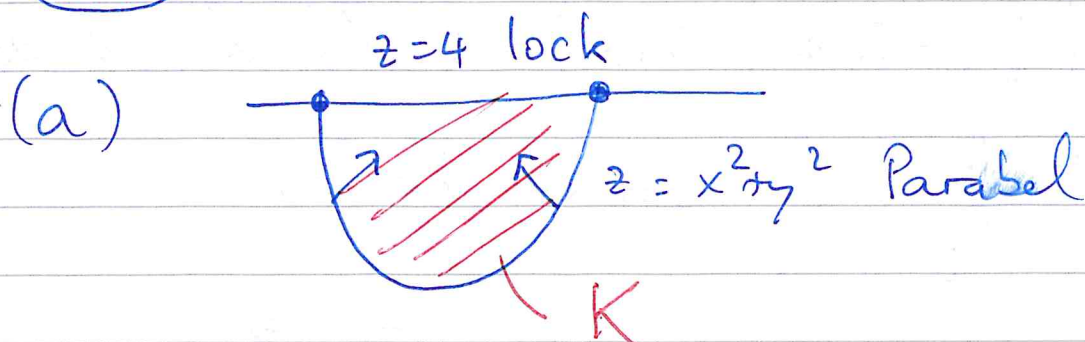
$$\Rightarrow -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 100 r^2 \cos^2 \theta (10 r \, dr \, d\theta)$$

$$= -3000 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr$$

$$= -3000 \times \pi \times \frac{1}{4} = -750\pi$$

SVAR

#6



Flöde upp = Flöde in i K

$$\partial K = Y_1 \cup Y_3 \quad \hookrightarrow \text{locket}$$

Enligt Gauss:

$$\iiint_K \nabla \cdot F \, dV = \overset{\text{Flöde in}}{- \iint_{Y_1 \cup Y_3} F \cdot \hat{N} \, dS}$$

$$= - \iint_{Y_1} F \cdot \hat{N} \, dS - \iint_{Y_3} F \cdot \hat{N} \, dS$$

$$\Rightarrow \iint_{Y_1} F \cdot \hat{N} \, dS = - \underbrace{\iiint_K \nabla \cdot F \, dV}_{(1)} - \underbrace{\iint_{Y_3} F \cdot \hat{N} \, dS}_{(2)}$$

$$\begin{aligned} (1) : \nabla \cdot F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(-y/2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2) \\ &= 0 - 1/2 + 0 = -1/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_K \nabla \cdot F \, dV = -1/2 \iiint_K dV$$

Byt till cylindriska

$$= -\frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} dz$$

$$= -\frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4 - x^2 - y^2) dx dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta$$

$$= -\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr$$

$$= -\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right)_{r=0}^{r=2} = -4\pi.$$

② : Flöde in $\Rightarrow \hat{N} = (0, 0, -1)$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -x^2$$

$$\Rightarrow \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -x^2 dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta (r dr d\theta)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = -\pi/4$$

Lägg ihop ① & ② $\Rightarrow$

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = -(-4\pi) - (-\pi/4) = \frac{17\pi}{4}$$

Svar

(b) Vi parametriserar ytan i stället

Givet $z = x + y^2 = f(x, y)$ funktionsyta

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{N}} dS = \pm (f_x, f_y, -1) dx dy$$

$$= \pm (1, 2y, -1) dx dy$$

Flöde upp $\Rightarrow z$ -komp. positiv

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{N}} dS = (-1, -2y, 1) dx dy$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = (z, -y/2, x^2) \cdot (-1, -2y, 1) dx dy$$

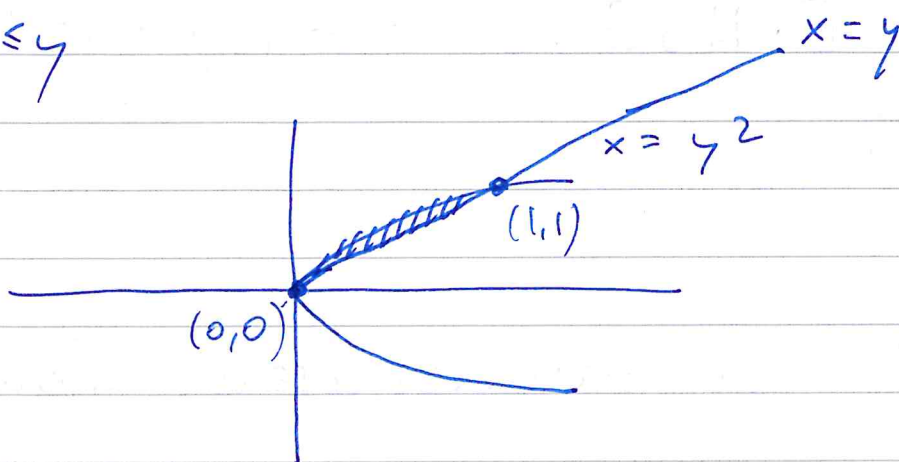
$$= (-z + y^2 + x^2) dx dy$$

$$= (-x - y^2) + y^2 + x^2 dx dy$$

$$= (x^2 - x) dx dy$$

$$\Rightarrow \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\Pi(Y_2)} (x^2 - x) dx dy$$

$$= \iint_{y^2 \leq x \leq y} (x^2 - x) dx dy$$



$$\Rightarrow \int_0^1 dy \int_{y^2}^y (x^2 - x) dx$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)_{y^2}^y$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{3} + \frac{y^4}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{21} + \frac{1}{10}$$

$$= -\frac{13}{420} \quad \underline{\text{SVAR.}}$$

7

Kom ihåg Gauss formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (*)$$

(ty integranden e^{-x^2} är en jämn funktion)

Beakta nu vår integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Substituera $x = u^2 \Rightarrow \sqrt{x} = u$
 $dx = 2u du$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \quad (*) = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{\pi}$$

v.s.v.

