Tentamen
MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

2021-03-13 kl. 09.00–12.00 (09.00 - 13.30 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475, 031-7725371

Hjälpmedel:

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2021 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 6 april. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS!

Externa hjälpmedel är tillåtna men alla stegen i dina resonemang och beräkningar måste motiveras väl i skrift. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$F(x,\, y,\, z) = x^2 y e^{z-1} - xyz.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $F(x,\, y,\, z) = 2$ i punkten $(2,\, 1,\, 1)$. (2p)

(b) Bestäm en riktning $\hat{\mathbf{u}} = (a,\, 0,\, c) \in S^2$ så att riktningsderivatan för F i punkten $(2,\, 1,\, 1)$ och i riktningen $\hat{\mathbf{u}}$ är $1/5$. (2p)

(c) Motivera varför ekvationen $F(x,\, y,\, z) = 2$ definierar en implicit funktion $z = f(x,\, y)$ i en omgivning av $(2,\, 1,\, 1)$. Bestäm f_x, f_y och f_{xx} i punkten $(2,\, 1)$. (4p)

2. Låt $f(x,\, y) = x^3 + y^3 + xy - 2(x + y)$. (7p)

(a) Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till f.

(b) Bestäm det största och minsta värdet som f antar i den axelparallella kvadraten $[-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$.

Var god vänd!

3. Betrakta PDEn (6p)

$$f_{xy} - \frac{2y}{x} f_{yy} - \frac{2}{x} f_y = -x \quad (x > 0,\ y > 0).$$

Bestäm ekvationens allmänna lösning genom att införa de nya variablerna $u = 1/x$, $v = x^2 y$.

4. (a) Beräkna (3p)

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x^2}{(1+y^2)^3}\, dy\, dx.$$

(b) Beräkna masscentrumet av ett föremål som ockuperar den del K av enhetsklotet som tillhör den första oktanten, dvs $K = \{(x,\ y,\ z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, och vars densitet varierar enligt $\rho(x,\ y,\ z) = xyz$. (4p)

5. Låt $\gamma = \{(t,\ 3t^2,\ 6t^3) : \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$.

(a) Beräkna längden av γ. (2p)

(b) Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där (4p)

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{x},\ \frac{-z}{y^2+z^2} + \frac{1}{y},\ \frac{y}{y^2+z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{6x^3} \right).$$

6. Låt fältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och ytan $Y \subset \mathbb{R}^3$ ges av flödet av fältet av området

$$\mathbf{F} = (y(x+z),\ z(x+y),\ x(y+z)+z^2), \quad Y = \{(x,\ y,\ z) : x^2 + 4y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom Y

(a) *utan* Gauss Sats, dvs via direkt parametrisering av Y (4.5p)

(b) *med* Gauss Sats. (4.5p)

7. (....) $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ och (....) $z^2 = (x-2)^2 + y^2$, $z \geq 0$ skär varandra i en (....), som vi betecknar γ.

(a) Fyll i de rätta orden. Obs! Det räcker inte att skriva "ytan" och "kurva", du måste vara mer precis. (1p)

(b) Bestäm $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (e^x,\ z^2,\ xyz)$ och γ är orienterad moturs sett långt nerifrån längs z-axeln. (6p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 210313

1. (a)

$$\nabla F = (F_x,\, F_y,\, F_z) = (2xye^{z-1} - yz,\, x^2e^{z-1} - xz,\, x^2ye^{z-1} - xy) \overset{(2,1,1)}{=} (3,\, 2,\, 2).$$

Så tangentplanets ekvation lyder

$$(3,\, 2,\, 2)\cdot(x-2,\, y-1,\, z-1) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 2z = 10.$$

(b) $F_{\mathbf{u}} = \nabla F \cdot \hat{\mathbf{u}} = (3,\, 2,\, 2)\cdot(a,\, 0,\, c) = 3a + 2c$, så vi vill ha

$$3a + 2c = \frac{1}{5}, \tag{1}$$

givet att

$$||\hat{\mathbf{u}}|| = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + c^2 = 1. \tag{2}$$

Det är lätt att se att en lösning till (1) och (2) är $a = 3/5$, $c = -4/5$.
Svar: $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{5}(3,\, 0,\, -4)$.

(c) Som vi redan har sett är $\nabla F(2,\, 1,\, 1) = (3,\, 2,\, 2)$. Eftersom $F_z(2,\, 1,\, 1) = 2 \neq 0$ så är z en implicit funktion av x och y i en omgivning. Dessutom enligt Implicita Funktionssatsen gäller i punkten $(2,\, 1)$ att

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3}{2}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Sedan har vi:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = \frac{F_x\frac{\partial F_z}{\partial x} - F_z\frac{\partial F_x}{\partial x}}{(F_z)^2} \\ &\overset{(2,1,1)}{=} \frac{1}{2^2}\left(3\frac{\partial F_z}{\partial x} - 2\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{xx} = \frac{3}{4}\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}. \tag{3}$$

För det första,

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{z-1} - xy) = 2xye^{z-1} + x^2ye^{z-1}f_x - y \overset{(2,1,1)}{=} \cdots = -3$$

och för det andra,

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^{z-1} - yz) = 2ye^{z-1} + 2xye^{z-1}f_x - yf_x \overset{(2,1,1)}{=} \cdots = -\frac{5}{2}.$$

Insättning in i (3) ger $f_{xx} = \frac{3}{4}(-3) - \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) = -1$.

2. (a) I en kritisk punkt gäller

$$f_x = 3x^2 + y - 2 = 0, \tag{4}$$
$$f_y = 3y^2 + x - 2 = 0. \tag{5}$$

Från (4) och (5) härleder vi att

$$\begin{aligned} 3x^2 + y = 3y^2 + x \Leftrightarrow 3(x^2 - y^2) &= x - y = 3(x+y)(x-y) \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ eller } 3(x+y) = 1. \end{aligned}$$

Fall 1:

$$x = y \overset{(4)}{\Rightarrow} 3x^2 + x - 2 = 0 = (3x-2)(x+1) \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ eller } x = -1.$$

Så här har vi två kritiska punkter: $(2/3,\, 2/3)$ och $(-1,\, -1)$.

Fall 2:

$$3(x+y) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} - x \overset{(4)}{\Rightarrow} 3x^2 - x - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{6}.$$

Så här har vi ytterligare två kritiska punkter: $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{6},\, \frac{1-\sqrt{21}}{6}\right)$ och $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{6},\, \frac{1+\sqrt{21}}{6}\right)$.

Vi fortsätter till klassificeringen. Vi har

$$A = f_{xx} = 6x, \quad B = f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad C = f_{yy} = 6y,$$

vilket ger följande tabell:

Punkt	A	B	C	$AC - B^2$	Klass
$\left(\frac{2}{3},\, \frac{2}{3}\right)$	4	1	4	15	Lokalt. min.
$(-1,\, -1)$	-6	1	-6	35	Lokalt. max.
$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{6},\, \frac{1-\sqrt{21}}{6}\right)$	$1+\sqrt{21}$	1	$1-\sqrt{21}$	-21	Sadelpunkt
$\left(\frac{1-\sqrt{21}}{6},\, \frac{1+\sqrt{21}}{6}\right)$	$1-\sqrt{21}$	1	$1+\sqrt{21}$	-21	Sadelpunkt

(b) Alla fyra kritiska punkter ligger i kvadraten så måste beaktas som kandidater. Det återstår att kolla randen. Eftersom $f(x, y) = f(y, x)$ räcker det att kolla kvadratens horisontella sidor.

Botten sida: $f(x, -1) = x^3 - 3x + 1 := g(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Kritiska punkter: $0 = g'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow x = \pm 1$, vilka också är sidans ändpunkter. Så vi har två kandidater, $(\pm 1,\, -1)$, men bara en av dessa är ny, nämligen $(1,\, -1)$.

Topp sida: $f(x, 1) = x^3 - x - 1 := h(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Kritiska punkter: $0 = h'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$. Så $(\pm 1/\sqrt{3},\, 1)$ är kandidater, samt sidans ändpunkter $(\pm 1,\, 1)$.

Vi jämför nu alla våra kandidater:

$$f\left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3}\right)=-\frac{44}{27},\quad f(-1,\,-1)=3,$$
$$f\left(\frac{1+\sqrt{21}}{6},\,\frac{1-\sqrt{21}}{6}\right)=f\left(\frac{1-\sqrt{21}}{6},\,\frac{1+\sqrt{21}}{6}\right)=-\frac{17}{27},$$
$$f(1,\,-1)=f(-1,\,1)=f(1,\,1)=-1,$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,1\right)=-1-\frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\,1\right)=-1+\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Det största av dessa är 3 och minsta är $-44/27$ och dessa är följdaktligen f's största resp. minsta värden i kvadraten.

3. Notera att vi har ingen f_x eller f_{xx}-term i PDEn, så det räcker att jobba med f_y och dess partiella derivator.

Enligt kedjeregeln,

$$f_y=f_u\,u_y+f_v\,v_y=f_u\cdot 0+f_v\cdot x^2\Rightarrow f_y=x^2\,f_v. \tag{6}$$

Näst har vi

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\,f_y=\frac{\partial}{\partial x}(x^2\,f_v)=$$
$$\overset{\text{prod. + ked.}}{=}2x\,f_v+x^2(f_{vu}\,u_x+f_{vv}\,v_x)=2x\,f_v+x^2\left(f_{vu}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+f_{vv}(2xy)\right)$$
$$\Rightarrow f_{xy}=2x\,f_v-f_{uv}+2x^3y\,f_{vv}. \tag{7}$$

Sedan har vi

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2\,f_v)\overset{\text{ked.}}{=}x^2(f_{vu}\,u_y+f_{vv}\,v_y)=x^2(f_{uv}\cdot 0+f_{vv}\cdot x^2)$$
$$\Rightarrow f_{yy}=x^4\,f_{vv}. \tag{8}$$

Insättning av (6), (7) och (8) in i PDEn ger, efter mycket kancellation,

$$f_{uv}=x=\frac{1}{u}.$$

Första integrationen ger

$$f_v=\int\frac{1}{u}\,\partial u=\ln u+C(v).$$

Andra integrationen ger

$$f(u,\,v)=\int(\ln u+C(v))\,\partial v=v\,\ln u+C_1(v)+C_2(u)$$

$$\Rightarrow f(x,\,y)=-x^2y\ln x+g(x^2y)+h\left(\frac{1}{x}\right),$$

där $g(t)$, $h(t)$ är valfria C^2-funktioner av en variabel. Detta är ekvationens allmänna lösning.

4. (a) Notera att området $D = \{x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1\}$ kan i stället uttryckas som $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\, 0 \le x \le y\}$. Så vi byter ordningen i integrationen och får

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)^3} \int_0^y x^2\, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{y^3}{(1+y^2)^3}\, dy =$$

$$\overset{u:=1+y^2}{=} \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{u-1}{u^3}\, du = \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} \right]_{u=1}^{u=2} = \cdots = \frac{1}{48}.$$

(b) Notera att vi har fullständig symmetri i x, y och z, både när det gäller området K och densiteten ρ. Det innebär att $m_x = m_y = m_z$, så det räcker att beräkna m_x. Vi har

$$m_x = \frac{\iiint_K x\rho\, dV}{\iiint_K \rho\, dV}. \tag{9}$$

Vi byter till sfäriska koordinater, så att

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$
$$K = \{(r,\, \theta, \phi) : 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le \pi/2,\, 0 \le \phi \le \pi/2\}.$$

Först täljaren i (9):

$$\iiint_K x^2 yz\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r\sin\theta\cos\phi)^2 (r\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \left(\int_0^1 r^6\, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi \right)$$
$$\overset{u=\sin\theta,\, v=\cos\phi}{=} \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{105}.$$

Sedan nämnaren:

$$\iiint_K xyz\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r\sin\theta\cos\phi)(r\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \left(\int_0^1 r^5\, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^\phi \sin\phi\, d\phi \right)$$
$$\overset{u=\sin\theta,\, v=\cos\phi}{=} \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}.$$

Insättning in i (9) medför att $m_x = \frac{48}{105}$ och således är $\overline{m} = \frac{48}{105}(1,\, 1,\, 1)$.

5. (a) Kurvans längd ges av

$$\int_{1/2}^1 ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_{1/2}^1 ||(1,\, 6t,\, 18t^2)||\, dt = \int_{1/2}^1 \sqrt{1^2 + (6t)^2 + (18t^2)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 36t^2 + 324t^4}\, dt = \int_{1/2}^1 \sqrt{(1+18t^2)^2}\, dt = \int_{1/2}^1 (1 + 18t^2)\, dt =$$
$$= [t + 6t^3]_{t=1/2}^{t=1} = \cdots = \frac{23}{4}.$$

(b) Då

$$\phi(x,\, y,\, z) := \ln(xyz) + \tan^{-1}\left(\frac{z}{y}\right)$$

så är $\mathbf{F} = \nabla\phi + \big(0,\, 0,\, \frac{1}{6x^3}\big)$. Således gäller att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) + \int_\gamma \left(0,\, 0,\, \frac{1}{6x^3}\right)\cdot d\mathbf{r} =$$

$$\overset{\mathbf{b}=\mathbf{r}(1),\,\mathbf{a}=\mathbf{r}(1/2)}{=} \phi(1,\, 3,\, 6) - \phi\left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4},\, \frac{3}{4}\right) + \int_{1/2}^{1}\left(0,\, 0,\, \frac{1}{6t^3}\right)\cdot(1,\, 6t,\, 18t^2)\, dt =$$

$$= \left[\ln 18 + \tan^{-1} 2\right] - \left[\ln\left(\frac{9}{32}\right) + \tan^{-1} 1\right] + \int_{1/2}^{1}\frac{3}{t}\, dt = \cdots = 9\ln 2 + \tan^{-1} 2 - \frac{\pi}{4}.$$

6. (a) Ytan Y parametriseras mest naturligt i (elliptiskt) cylindriska koordinater,

$$Y = \{\mathbf{r}(\theta,\, z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}, \tag{10}$$

där

$$\mathbf{r}(\theta,\, z) = \left(\cos\theta,\, \frac{1}{2}\sin\theta,\, z\right). \tag{11}$$

Från (11) har vi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}}\, dS &= \pm\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right) d\theta\, dz \\ &= \pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \frac{1}{2}\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\, d\theta\, dz \\ &= \pm\left(\frac{1}{2}\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0\right) d\theta\, dz.\end{aligned}$$

Eftersom vi söker flödet *ut* genom Y så är

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = +\left(\frac{1}{2}\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0\right) d\theta\, dz.$$

Ytterligare från (11) har vi

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta,\, z)) = \left(\frac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta + z),\, z\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right),\, \ldots\right),$$

där den $3e$ komponenten är ointressant ty den kommer att dödas när vi tar skalärprodukten

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta(\cos\theta + z) + z\sin\theta\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right).$$

Således blir

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta\cos^2\theta + \frac{5z}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{z}{2}\sin^2\theta\right) d\theta\, dz.$$

Pga symmetri är det lätt att se att de två första termerna integrerar till noll. Så vi har

$$\text{Flöde ut} = \frac{1}{2}\int_0^1 z\, dz\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Ytan Y är ej sluten, vi måste lägga till cylinderns topp- och bottenplattor. Kalla dessa för Y_1 resp. Y_2. Då säger Gauss sats att

$$\iint_{Y \cup Y_1 \cup Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV, \tag{12}$$

där K är den inneslutna cylindern, dvs $K = \{(x,\, y,\, z) : x^2 + 4y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}$. Ekv. (12) medför att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV - \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS - \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \tag{13}$$

För det första,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \cdots = x + y + 3z.$$

Av symmetriskäl är det lätt att se att $\iiint_K x\, dV = \iiint_K y\, dV = 0$. Så

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = 3 \iiint_K z\, dV = 3 \int_0^1 z\, dz \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} dx\, dy \overset{\text{Area}=\pi ab}{=} 3 \times \frac{1}{2} \times \pi(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \tag{14}$$

För det andra, på Y_1 gäller

$$z = 1, \quad \hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, 1), \quad dS = dx\, dy$$

$$\Rightarrow \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\pi(Y_1)} F_3\, dx\, dy = \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} (xy + x + 1)\, dx\, dy.$$

Av symmetriskäl är det klart att $\iint_{\pi(Y_1)} xy\, dA = \iint_{\pi(Y_1)} x\, dA = 0$. Så vi har att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} dx\, dy = \pi(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

För det tredje, på Y_2 gäller

$$z = 0, \quad \hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -1), \quad dS = dx\, dy$$

$$\Rightarrow \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\pi(Y_2)=Y_2} -F_3\, dx\, dy = -\iint_{x^2+4y^2 \leq 1} xy\, dx\, dy \overset{\text{symm.}}{=} 0. \tag{16}$$

Insättning av (14), (15) och (16) in i (13) ger $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pi/4$, så samma svar som i del (a), v.s.v.

7. (a) Sfären, (halv)konen, ellips.

(b) Först har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x & z^2 & xyz \end{vmatrix} = \cdots = z(x - 2,\, -y,\, 0). \tag{17}$$

Låt Y vara den del av sfären som ligger ovanför konen. Vi har $\gamma = \pm\partial Y$ och lämnar avgörandet om tecknet till slutet. Vid positiv orientering skulle Stokes sats säga att

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

(Övre halv)sfären är en implicit funktionsyta $F(x,\, y,\, z) = 20$, där $F(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Vid positiv orientering är

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = +\frac{\nabla F}{|F_z|}\, dx\, dy \overset{z \geq 0}{=} \frac{(x,\, y,\, z)}{z}\, dx\, dy. \tag{18}$$

Från (17) och (18) har vi

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = (x(x-2) - y^2)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{\pi(Y)} (x(x-2) - y^2)\, dx\, dy. \tag{19}$$

För att ta reda på $\pi(Y)$ sätt

$$z^2 = 20 - x^2 - y^2 = (x-2)^2 + y^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 9.$$

Så $\pi(Y)$ är en cirkelskiva av radie 3 med centrum i $(1,\, 0)$. Av symmetriskäl är $\iint_{\pi(Y)} (x-1)^2\, dx\, dy = \iint_{\pi(Y)} y^2\, dx\, dy$. Och eftersom $x(x-2) = (x-1)^2 - 1$ medför (19) att

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_{\pi(Y)} dx\, dy = -\mathrm{Area}(\pi(Y)) = -\pi(3^2) = -9\pi.$$

Så enligt Stokes sats är

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mp 9\pi. \tag{20}$$

Givet är att γ genomlöps moturs sett nerifrån, dvs medurs sett uppifrån, vilket ger riktningen av $d\mathbf{r}$. Från (18) ser vi att $\mathbf{N}$ har en positiv z-komponent och därmed pekar ut från den övre halvsfären. Således kommer $\mathbf{N} \times d\mathbf{r}$ att peka bort från den övre delen av sfären så γ har negativ orientering m.a.p. Stokes sats.

Från (20) drar vi slutsatsen att $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = +9\pi$.