Tentamen
MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

2020-08-25 kl. 08.30–11.30 (08.30 - 13.00 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2020 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 15 september. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$F(x,\, y,\, z) = x^2 + z^2 + ye^{xz}, \quad f(x,\, y) = F(x,\, y,\, 1) = x^2 + 1 + ye^{x}, \quad g(x,\, y) = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x}.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,\, y)$ i punkten $(1,\, 1,\, 2+e)$. (2p)

(b) Bestäm riktningsderivatan för $g(x,\, y)$ i punkten $(1,\, 1)$ och i riktning mot punkten $(-2,\, 3)$. (2p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad två till $g(x,\, y)$ i punkten $(1,\, 1)$ och därmed ett approximativt värde för $g(0.99, 1.02)$. (2p)

(d) Motivera varför ekvationen $F(x,\, y,\, z) = 5$ definierar en implicit funktion $z = h(x,\, y)$ i en omgivning av $(2,\, 1,\, 0)$. Bestäm h_x, h_y och h_{xx} i punkten $(2,\, 1)$. (4p)

(e) Låt $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $\mathbf{K}(x,\, y) = (f(x,\, y),\, g(x,\, y))$. Motivera varför avbildningen $\mathbf{K}$ är injektiv i en omgivning av punkten $(1,\, 1)$ och bestäm funktionalmatrisen $D(\mathbf{K}^{-1})$ i punkten $(2+e,\, 3)$. (5p)
Bestäm även funktionalmatrisen $D(\mathbf{K} \circ \mathbf{K})$ i punkten $(1,\, 1)$.

2. (a) Beräkna $\iint_D \sqrt{1-y^4}\, dA$, där D är området i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^3$. (4p)

(b) Beräkna $\iint_T (x^2 + 2xy + y^2)e^{x-y}\, dx\, dy$, där T är triangeln med hörn i $(0,\, 0)$, $(1,\, 1)$ och $(2,\, 0)$. (4p)

Var god vänd!

3. Låt $\gamma = \{(t+2,\, t^2-1,\, t^2+1) : 0 \le t \le 1\}$.

(a) Om en partikel rör sig längs kurvan γ så att t betecknar tid, förklara varför den sammanlagda kraften som partikeln upplever är konstant. (1p)

(b) Beräkna längden av γ. (3p)

(c) Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = \left(\frac{2x}{z},\, \frac{2y}{z},\, x - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$. (3p)

4. (a) Beräkna volymen av området (3p)

$$K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge |x|,\ z \le +\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

(b) Ytan $x^2+y^2+4z^2 = 1$ är en ..... Fyll i rätt ord. (0.5p)

(c) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (xz^2,\, yz,\, z^2)$ ut ur området $x^2+y^2+4z^2 \le 1$. (3p)

5. (a) Skärningskurvan $\mathcal{C}$ mellan .... $(x-1)^2+4y^2 = 16$, $z \in \mathbb{R}$ och .... $2x+y+z = 3$ är en ..... Fyll i de rätta orden. (Obs! Det räcker ej att skriva "ytan" och "kurva", du måste vara mer precis). (1.5p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\oint_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (z^2+y^2+\sin x^2,\, 2xy+z,\, xz+2yz)$ och $\mathcal{C}$ är orienterad medurs sett långt uppifrån längs z-axeln. (5p)

6. Låt $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\, y \ge 0\}$ och låt

$$f(x,\, y) = (x^2 - xy + 2y^2)e^{-x-y}.$$

(a) Utan att beräkna några partiella derivator, motivera varför f antar både ett största och minsta värde i D men bara ett minsta värde i hela $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Bestäm alla kritiska punkter samt de största och minsta värdena till f i D. (5p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 200825

1. (a)

$$\nabla f = (f_x,\, f_y) = (2x + ye^x,\, e^x) \overset{(1,1)}{=} (2+e,\, e).$$

Så tangentplanets ekvation lyder

$$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) \Rightarrow z-(2+e) = (2+e)(x-1)+e(y-1) \;\Rightarrow\; (2+e)x+ey-z = e.$$

(b) Gradienten av g ges av

$$\nabla g = (g_x,\, g_y) = \left(\frac{2}{y} - \frac{y}{x^2},\, -\frac{2x}{y^2} + \frac{1}{x}\right) \overset{(1,1)}{=} (1,\, -1).$$

En riktningsvektor ges av

$$\mathbf{u} = (-2,\, 3) - (1,\, 1) = (-3,\, 2).$$

Således ges riktningsderivatan av

$$g_{\mathbf{u}} = \nabla g \cdot \hat{\mathbf{u}} = (1,\, -1) \cdot \frac{(-3,\, 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \cdots = -\frac{5}{\sqrt{13}}.$$

(c) Från (b) har vi redan att

$$g(1,\, 1) = 3, \quad g_x(1,\, 1) = 1, \quad g_y(1,\, 1) = -1.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \frac{2y}{x^3} \overset{(1,1)}{=} 2, \\ g_{xy} = g_{yx} &= -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{x^2} \overset{(1,1)}{=} -3, \\ g_{yy} &= \frac{4x}{y^3} \overset{(1,1)}{=} 4. \end{aligned}$$

Således ges Taylorpolynomet av grad två i $(1,\, 1)$ av

$$P(h,\, k) = 3 + (h-k) + \frac{1}{2}(2h^2 - 6hk + 4k^2) = 3 + h - k + h^2 - 3hk + 2k^2.$$

Approximationen ges av

$$P(-0.01,\, 0.02) = 3 + (-0.01 - 0.02) + \frac{1}{2}(2(-0.01)^2 - 6(-0-01)(0.02) + 4(0.02)^2) = \cdots = 2.973.$$

(d) Vi har

$$\nabla F = (F_x,\, F_y,\, F_z) = (2x + yze^{xz},\, e^{xz},\, 2z + xye^{xz}) \overset{(2,1,0)}{=} (4,\, 1,\, 2).$$

Eftersom $F_z(2,\, 1,\, 0) = 2 \neq 0$ så är z en implicit funktion av x och y i en omgivning. Dessutom enligt Implicita Funktionssatsen gäller i punkten $(2,\, 1)$ att

$$h_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4}{2} = -2, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{2}.$$

Sedan har vi:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = \frac{F_x \frac{\partial F_z}{\partial x} - F_z \frac{\partial F_x}{\partial x}}{(F_z)^2} \\ &\overset{(2,1,0)}{=} \frac{1}{2^2}\left(4\frac{\partial F_z}{\partial x} - 2\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2z + xye^{xz}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(2x + yze^{xz}) \\ &= [2h_x + y[e^{xz} + xe^{xz}(z + xh_x)]] - \frac{1}{2}[2 + y[h_x e^{xz} + ze^{xz}(z + xh_x)]] \\ &\overset{(2,1,0)}{=} [2(-2) + 1[1 + 2(1)(0 + 2(-2))]] - \frac{1}{2}[2 + 1[2(1) + 0]] = \cdots = -13. \end{aligned}$$

(e) Notera att $\mathbf{K}(1,\,1) = (2+e,\,3)$. Vi har

$$D\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + ye^x & e^x \\ \frac{2}{y} - \frac{y}{x^2} & -\frac{2x}{y^2} + \frac{1}{x} \end{bmatrix} \overset{(1,1)}{=} \begin{bmatrix} 2+e & e \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinanten är $(2+e)(-1) - e(1) = -2(1+e) \neq 0$, vilket innebär enligt Inversa funktionssatsen att $\mathbf{K}$ är bijektiv och därmed inverterbar i en omgivning av $(1,\,1)$. Dessutom ges $D(\mathbf{K}^{-1})$ i punkten $(2+e,\,3) = \mathbf{K}(1,\,1)$ av

$$\begin{bmatrix} 2+e & e \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2(1+e)} \begin{bmatrix} -1 & -e \\ -1 & 2+e \end{bmatrix}.$$

Enligt kedjeregeln gäller

$$\begin{aligned} D(\mathbf{K} \circ \mathbf{K})(1,\,1) &= D\mathbf{K}(\mathbf{K}(1,\,1)) \cdot D\mathbf{K}(1,\,1) = D\mathbf{K}(2+e,\,3) \cdot D\mathbf{K}(1,\,1) = \\ &= \begin{bmatrix} 2(2+e) + 3e^{2+e} & e^{2+e} \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{(2+e)^2} & -\frac{2(2+e)}{9} + \frac{1}{2+e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+e & e \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ = \cdots &= \begin{bmatrix} 2(2+e)^2 + (7+3e)e^{2+e} & 2e(2+e) + (3e-1)e^{2+e} \\ \frac{4(2+e)}{9} - \frac{2}{2+e} & \frac{2e}{3} - \frac{3e}{(2+e)^2} + \frac{2(2+e)}{9} - \frac{1}{2+e} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. (a) Notera att området D samt integranden $\sqrt{1-y^4}$ är symmetriska kring origo, så det räcker att integrera över den del av D som tillhör första kvadranten och sedan multiplicera med 2. Om vi sedan byter ordningen i integrationen får vi att

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-y^4}\,dA &= 2\int_0^1 \sqrt{1-y^4}\,dy \int_{y^3}^{y} dx = 2\int_0^1 (y-y^3)\sqrt{1-y^4}\,dy = \\ &\overset{u:=y^2}{=} \int_0^1 (1-u)\sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du - \int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du = \\ &\overset{u:=\sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \overset{v:=1-u^2}{-} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{v}\,dv = \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(b) Notera att integralen kan skrivas som

$$\iint_T (x+y)^2 e^{(x+y)(x-y)}\,dx\,dy.$$

Vi byter variabler till $u = x+y$, $v = x-y$ sådan att

$$\frac{d(u,\,v)}{d(x,\,y)} = \left\| \begin{matrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| = 2 \;\Rightarrow\; \frac{d(x,\,y)}{d(u,\,v)} = \frac{1}{2}.$$

I termer av u och v så är $T = \{(u,\,v) : 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le u\}$. Integralen blir därmed

$$\int_0^2 du \int_0^u \frac{1}{2}u^2 e^{uv}\,dv = \cdots = \frac{1}{2}\int_0^2 u(e^{u^2} - 1)\,du \overset{v=u^2}{=} \cdots = \frac{1}{4}(e^4 - 5).$$

3. (a) Partikelns acceleration är $\mathbf{r}''(t) = (0,\,2,\,2)$. Eftersom accelerationen är konstant så också är den sammanlagda kraften, enligt Newtons andra lag.

(b) Kurvans längd ges av

$$\begin{aligned} \int_0^1 ||\mathbf{r}'(t)||\,dt &= \int_0^1 ||(1,\,2t,\,2t)||\,dt = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2}\,dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+8t^2}\,dt \overset{u:=\sqrt{8}t}{=} \frac{1}{\sqrt{8}}\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{1+u^2}\,du = \text{..(formelblad)..} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2})\right]_0^{\sqrt{8}} = \cdots = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{\ln(3+\sqrt{8})}{\sqrt{8}}\right). \end{aligned}$$

(c) Då $\phi(x, y, z) := \frac{x^2+y^2}{z}$ så är $\mathbf{F} = \nabla\phi + (0, 0, x)$. Således gäller att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) + \int_\gamma (0, 0, x) \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \phi(3, 0, 2) - \phi(2, -1, 1) + \int_0^1 (0, 0, t+2) \cdot (1, 2t, 2t)\, dt =$$

$$= \frac{9}{2} - 5 + \int_0^1 2t(t+2)\, dt = \cdots = \frac{13}{6}.$$

4. (a) Området K ges i sfäriska koordinater av

$$K = \left\{(\rho, \theta, \phi) : 0 \le \rho \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi,\ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Därmed är

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \cdots = \frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(b) Ellipsoid.

(c) Vi använder Gauss sats. Först har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = z^2 + 3z.$$

Låt D vara området som innesluts av ellipsoiden, alltså

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 4z^2 \le 1\}.$$

Enligt Gauss sats så ges flödet av $\iiint_D (z^2 + 3z)\, dV = \iiint_D z^2\, dV$, ty $\iiint_D z\, dV = 0$ av symmetriskäl. Nu byter vi till ellipsoidiska koordinater:

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi, \quad z = \frac{1}{2}\rho\cos\theta$$

så att $D = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi\}$. Flödet blir således

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (\rho\cos\theta)^2 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = ..(u := \cos\theta).. = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{30}.$$

5. (a) (Elliptiska) cylindern, planet, ellips.

(b) Först har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + y^2 + \sin x^2 & 2xy + z & xz + 2yz \end{vmatrix} = \cdots = (2z - 1, z, 0).$$

Låt Y vara den del av planet som innesluts av $\mathcal{C}$. Eftersom $\mathcal{C}$ har negativ orientering m.a.p. Stokes sats så har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_{\pi(Y)} (2z - 1, z, 0) \cdot (2, 1, 1)\, dx\, dy =$$

$$= 2\iint_{\pi(Y)} (1 - 3z)\, dx\, dy \overset{z=3-2x-y}{=} 2\iint_{(x-1)^2+4y^2 \le 16} (6x + 3y - 8)\, dx\, dy.$$

Av symmetriskäl så är $\iint_{\pi(Y)} (x-1)\, dx\, dy = \iint_{\pi(Y)} y\, dx\, dy = 0$. Således har vi kvar

$$\iint_{\pi(Y)} -4\, dx\, dy = -4 \times \mathrm{Area}(\pi(Y)) = -4 \times \pi ab = -4 \times \pi(4)(2) = -32\pi.$$

6. (a) Den kvadratiska formen $Q(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ har $A = 1$, $B = 1/2$, $C = 2$, alltså $AC - B^2 = \frac{7}{4} > 0$ och $A = 1 > 0$, vilket innebär at Q är positiv definit. Således måste $f(x, y) \geq 0$ gälla i hela $\mathbb{R}^2$, så $0 = f(0, 0)$ är ett globalt minimum för f i hela $\mathbb{R}^2$. I den tredje kvadranten $x < 0$, $y < 0$ så kan f bli godtyckligt stort, så f har inget globalt maximum i $\mathbb{R}^2$. Däremot i den första kvadranten D är det klart att $f \to 0$ då $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. Eftersom D är slutet så f kommer att ha ett maximum i D, vilket antas antingen i en kritisk inre punkt (där $x > 0$ och $y > 0$) eller i en randpunkt på någon av koordinataxlarna.

(b) Först hittar vi alla kritiska punkter. Vi har

$$f_x = e^{-x-y}[(x^2 - xy + 2y^2)(-1) + (2x - y)], \quad f_y = e^{-x-y}[(x^2 - xy + 2y^2)(-1) + (4y - x)].$$

I en kritisk punkt är $f_x = f_y = 0$. Exponentialen kan inte bli noll så

$$\begin{aligned} 2x - y = x^2 - xy + 2y^2 = 4y - x \Rightarrow y = \frac{3x}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = -\left[x^2 - x\left(\frac{3x}{5}\right) + 2\left(\frac{3x}{5}\right)^2\right] + 2x - \left(\frac{3x}{5}\right) \\ \Rightarrow \cdots \Rightarrow 0 = -\frac{28}{25}x^2 + \frac{7}{5}x \Rightarrow x = 0 \text{ eller } x = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Så vi har två kritiska punkter $(0, 0)$ och $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Den senare är en kandidat för var f antar sitt största värde i D. Vi måste dock också kolla Ds rand. Vi har $f(x, 0) = x^2 e^{-x}$ och $f(0, y) = 2y^2 e^{-y} := g(y)$. f är dubbelt så stort längs y-axeln så det räcker att kolla den. Vi har $g'(y) = 2e^{-y}(2y - y^2)$ så $g'(y) = 0$ då $y = 0$ eller $y = 2$. Det första alternativet ger punkten $(0, 0)$ igen, det andra ger punkten $(0, 2)$.
Våra två kandidatpunkter för max i D är således $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ och $(0, 2)$. Vi beräknar

$$f\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}e^{-2}, \quad f(0, 2) = 8e^{-2},$$

så det största värdet är uppenbarligen $8e^{-2}$.

Tentamen
MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

2020-08-25 kl. 08.30–11.30 (08.30 - 13.00 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2020 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 15 september. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$F(x,\,y,\,z) = x^2 + z^2 + ye^{xz}, \quad f(x,\,y) = F(x,\,y,\,1) = x^2 + 1 + ye^{x}, \quad g(x,\,y) = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x}.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,\,y)$ i punkten $(1,\,1,\,2+e)$. (2p)

(b) Bestäm riktningsderivatan för $g(x,\,y)$ i punkten $(1,\,1)$ och i riktning mot punkten $(-2,\,3)$. (2p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad två till $g(x,\,y)$ i punkten $(1,\,1)$ och därmed ett approximativt värde för $g(0.99, 1.02)$. (2p)

(d) Motivera varför ekvationen $F(x,\,y,\,z) = 5$ definierar en implicit funktion $z = h(x,\,y)$ i en omgivning av $(2,\,1,\,0)$. Bestäm h_x, h_y och h_{xx} i punkten $(2,\,1)$. (4p)

(e) Låt $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $\mathbf{K}(x,\,y) = (f(x,\,y),\, g(x,\,y))$. Motivera varför avbildningen $\mathbf{K}$ är injektiv i en omgivning av punkten $(1,\,1)$ och bestäm funktionalmatrisen $D(\mathbf{K}^{-1})$ i punkten $(2+e,\,3)$. (5p)
Bestäm även funktionalmatrisen $D(\mathbf{K} \circ \mathbf{K})$ i punkten $(1,\,1)$.

2. (a) Beräkna $\iint_D \sqrt{1-y^4}\,dA$, där D är området i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = \sqrt[3]{x}$. (4p)

(b) Beräkna $\iint_T (x^2 + 2xy + y^2)e^{x^2-y^2}\,dx\,dy$, där T är triangeln med hörn i $(0,\,0)$, $(1,\,1)$ och $(2,\,0)$. (4p)

Var god vänd!

3. Låt $\gamma = \{(t+2,\, t^2-1,\, t^2+1) : 0 \leq t \leq 1\}$.

(a) Om en partikel rör sig längs kurvan γ så att t betecknar tid, förklara varför den sammanlagda kraften som partikeln upplever är konstant. (1p)

(b) Beräkna längden av γ. (3p)

(c) Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = \left(\frac{2x}{z},\, \frac{2y}{z},\, x - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$. (3p)

4. (a) Beräkna volymen av området (3p)

$$K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \geq |x|,\ z \leq +\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

(b) Ytan $x^2+y^2+4z^2 = 1$ är en ..... Fyll i rätt ord. (0.5p)

(c) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (xz^2,\, yz,\, z^2)$ ut genom ytan i (b). (3p)

5. (a) Skärningskurvan $\mathcal{C}$ mellan .... $(x-1)^2+4y^2 = 16$, $z \in \mathbb{R}$ och .... $2x+y+z = 3$ är en ..... Fyll i de rätta orden. (OBS! Det räcker ej att skriva "ytan" och "kurva", du måste vara mer precis). (1.5p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\oint_\mathcal{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (z^2+y^2+\sin x^2,\, 2xy+z,\, xz+2yz)$ och $\mathcal{C}$ är orienterad moturs sett långt nerifrån längs z-axeln. (5p)

6. Låt $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0\}$ och låt

$$f(x,\, y) = (x^2 - xy + 2y^2)e^{-x-y}.$$

(a) Utan att beräkna några partiella derivator, motivera varför f antar både ett största och minsta värde i D men bara ett minsta värde i hela $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Bestäm alla kritiska punkter samt de största och minsta värdena till f i D. (5p)

Go n'eirí an bóthar libh!